Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Αν $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις , να δείξετε ότι για την συνάρτηση $F(x)=f(x)+g(x)$ ισχύει $F'(x)=f'(x)+g'(x)$.

Μονάδες 9

Β. **α.** Να διατυπώσετε τον αξιωματικό ορισμό της πιθανότητας για ένα ενδεχόμενο **Α** ενός δειγματικού χώρου **Ω** με πεπερασμένο πλήθος στοιχείων.

Μονάδες 3

β. Τι εκφράζει η αθροιστική συχνότητα N_i της τιμής x_i μιας ποσοτικής μεταβλητής X;

Μονάδες 3

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη *ΣΩΣΤΟ*, αν η πρόταση είναι σωστή , ή *ΛΑΘΟΣ* , αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α, λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$ όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1.

Μονάδες 2

β. Το τόξο α_i ενός κυκλικού τμήματος στο κυκλικό διάγραμμα συχνοτήτων είναι ίσο με $\alpha_i = 360^\circ \cdot v_i$.

Μονάδες 2

γ. **Αν Α, Β** είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου τότε το ενδεχόμενο να μην πραγματοποιηθεί κανένα από τα δύο είναι $(A \cup B)'$.

Μονάδες 2

δ. Ισχύει: $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

Μονάδες 2

ε. Το εύρος σε ομαδοποιημένα δεδομένα μπορεί να διαφέρει από τα αντίστοιχα δεδομένα πριν αυτά ομαδοποιηθούν.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2ο

Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \ln(x^2+1) + x + \sqrt{\alpha+15}}$, όπου **α** μια σταθερά με $\mathbf{\alpha \geq -15}$.

Α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $\mathbf{f(x)}$

Μονάδες 3

Β. Να βρείτε:

α. την $\mathbf{f'(x)}$.

Μονάδες 5

β. το $\mathbf{\lim\limits_{x \to -1}\left[f'(x) \cdot \dfrac{x^2+1}{x^2-x-2}\right]}$.

Μονάδες 5

Γ. Να δείξετε ότι η εξίσωση της εφαπτομένης **(ε)** της γραφικής παράστασης της $\mathbf{f(x)}$ που είναι παράλληλη στην ευθεία $\mathbf{y = x}$ είναι $\mathbf{y = x + \sqrt{\alpha+15}}$.

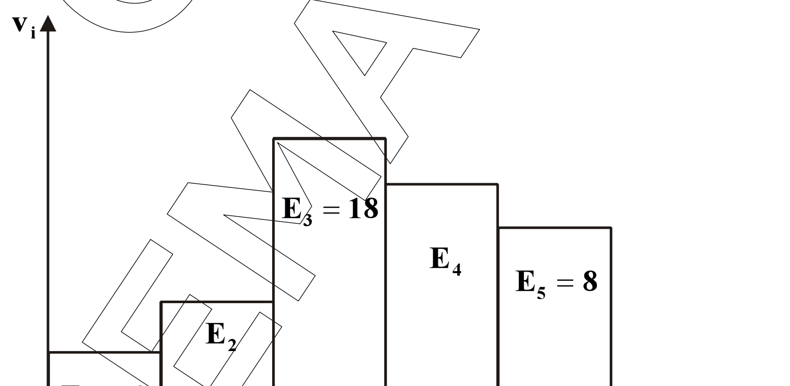
Μονάδες 6

Δ. Να βρείτε την τιμή του **α** αν η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων της ευθείας **(ε)** τα οποία έχουν τετμημένες **0 , 1 , 9, 10** είναι **50**.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 3ο

Το παρακάτω ιστόγραμμα συχνοτήτων δείχνει τις βαθμολογίες των μαθητών της *Γ' Λυκείου* ενός σχολείου, σε ένα διαγώνισμα. Μέσα στα ορθογώνια που έχουν βάση ίση με τη μονάδα δίνονται τα εμβαδά τριών από αυτά.



Αν $\mathbf{N_4 = 6\nu_2}$ και το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι **50**, τότε**:**

Α. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών.

Μονάδες 3

Β. Να κατασκευάσετε τον πίνακα κατανομής συχνοτήτων, αθροιστικών συχνοτήτων και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων.

Μονάδες 10

Γ. Αν επιλέξουμε τυχαία ένα μαθητή της *Γ΄ Λυκείου* του σχολείου να βρείτε την πιθανότητα των ενδεχομένων.

α. Ο βαθμός του γραπτού να είναι μεγαλύτερος ή ίσος του **10** και μικρότερος του **17.**

Μονάδες 6

β. Ο βαθμός του γραπτού να είναι κάτω από **10** ή τουλάχιστον **16**.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ 4^{o}

Έστω $\mathbf{\Omega = \{2,3,6,\kappa,\lambda,\mu\}}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης και το ενδεχόμενο $\mathbf{A = \{\kappa,\lambda,\mu\}}$, ώστε να ισχύουν: $\mathbf{P(A) = \frac{1}{2}}$ και $\mathbf{2P(2) = \frac{P(3)}{3} = P(6) = P(\kappa) = \frac{P(\lambda)}{2}}$.

Α. Να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του **Ω**.

Μονάδες 5

Β. Να βρείτε τα **κ, λ, μ** αν η συνάρτηση $\mathbf{f(x) = \frac{\lambda}{3}x^3 - 12x^2 + 20x + 2010}$ έχει εφαπτομένη στο σημείο $\mathbf{A(-1, f(-1))}$ με συντελεστή **48** ενώ τα **κ** και **μ** είναι οι θέσεις των τοπικών ακροτάτων της με **κ** μικρότερο του **μ**.

Μονάδες 4

Γ. Δίνεται η συνάρτηση $\mathbf{g(x) = \frac{2x^2 - 32}{\sqrt{2x-3} - \sqrt{5}}}$.

Να βρείτε το πεδίο ορισμού **Δ** της g(x) και στη συνέχεια τα στοιχεία του ενδεχομένου **Β** όταν: $\mathbf{B = \{x \in \Omega \text{ και } x \in \Delta\}}$.

Μονάδες 4

Δ. Σε ένα δείγμα **160** παρατηρήσεων που ακολουθούν κανονική κατανομή οι **4** από αυτές είναι μεγαλύτερες από το **20** ενώ το εύρος **R** των παρατηρήσεων είναι ίσο με τα $\mathbf{\frac{3}{4}}$ της μέσης τιμής $\mathbf{\bar{x}}$.

Να βρείτε το ενδεχόμενο $\Gamma = \{c \in \Omega$ ώστε ο **c** προστιθέμενος σε όλες τις παρατηρήσεις να γίνεται το δείγμα ομοιογενές$\}$.

Μονάδες 4

Ε. Να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων $\mathbf{A \cap \Gamma}$, $\mathbf{B - \Gamma}$, $\mathbf{A \cup \Gamma}$, $\mathbf{B \cup A'}$.

Μονάδες 8

Γ' ΤΑΞΗ ΓΕΝ.ΛΥΚΕΙΟΥ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

Α. Απόδειξη (βλ. σχολικό σελ.31)

Β. **α.** ορισμός (βλ. σχολικό σελ.149)
β. ορισμός (βλ. σχολικό σελ.66)

Γ. **α.** Λάθος
β. Λάθος
γ. Σωστό
δ. Λάθος
ε. Σωστό

ΘΕΜΑ 2

Α. Πρέπει $x^2+1\geq 0$, το οποίο ισχύει για κάθε $x\in\mathbf{R}$ έτσι $A=R$

Β. **α.** $$f'(x)=\left(\ln(x^2+1)+x+\sqrt{\alpha+15}\right)'=\frac{2x}{x^2+1}+1=\frac{x^2+1+2x}{x^2+1}=\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$$

β. $$\lim_{x\to -1}\left[f'(x)\frac{x^2+1}{x^2-x-2}\right]=\lim_{x\to -1}\left(\frac{x^2+2x+1}{x^2+1}\cdot\frac{x^2+1}{x^2-x-2}\right)=$$

$$\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)^2}{(x-2)\cdot(x+1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x-2}=\frac{-1+1}{-1-2}=\frac{0}{-3}=0.$$

Γ. Έστω $M(x_0,f(x_0))$ το σημείο επαφής της ζητούμενης εφαπτομένης με την C_f.

Αφού $(\varepsilon)//(\eta)$ πρέπει: $f'(x_0)=1\Rightarrow\dfrac{x_0^2+2x_0+1}{x_0^2+1}=1\Rightarrow x_0^2+2x_0+1=x_0^2+1\Rightarrow$

$2x_0=0\Rightarrow x_0=0$.

Αφού $f(0)=\ln 1+\sqrt{\alpha+15}=\sqrt{\alpha+15}$, το σημείο επαφής είναι $M\left(0,\sqrt{\alpha+15}\right)$

Έτσι $(\varepsilon): y=f'(0)\cdot x+\beta$ δηλαδή $(\varepsilon): y=x+\beta$

Όμως $M\in(\varepsilon)\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}=0+\beta\Rightarrow\beta=\sqrt{\alpha+15}$ έτσι $(\varepsilon): y=x+\sqrt{\alpha+15}$.

Δ. για $x_1=0$ έχω $y_1=\sqrt{\alpha+15}$
για $x_2=1$ έχω $y_2=1+\sqrt{\alpha+15}$
για $x_3=9$ έχω $y_3=9+\sqrt{\alpha+15}$
για $x_4=10$ έχω $y_4=10+\sqrt{\alpha+15}$

Οι τιμές αυτές σε αύξουσα σειρά είναι:

$\sqrt{\alpha+15}$, $\sqrt{\alpha+15}+1$, $\sqrt{\alpha+15}+9$, $\sqrt{\alpha+15}+10$

$$\delta=\frac{\sqrt{\alpha+15}+1+\sqrt{\alpha+15}+9}{2}=\frac{2\sqrt{\alpha+15}+10}{2}=\sqrt{\alpha+15}+5$$

Αφού $\delta=50\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}+5=50\Rightarrow\sqrt{\alpha+15}=45\Rightarrow\alpha+15=2025\Rightarrow\alpha=2010$

ΘΕΜΑ 3

Α. Το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι ίσο με το μέγεθος του δείγματος **ν**, έτσι $\nu=50$.

Β. Τα εμβαδά των ορθογωνίων είναι ίσα με τις αντίστοιχες συχνότητες.

Κλάσεις [-)	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
0 - 4	2	4	0,08	8	4	0,08	8
4 – 8	6	7	0,14	14	11	0,22	22
8 – 12	10	18	0,36	36	29	0,58	58
12 – 16	14	13	0,26	26	42	0,84	84
16 - 20	18	8	0,16	16	50	1	100
Σύνολο	–	**ν = 50**	**1**	**100**			

Αφού $\nu=50\Rightarrow N_4+\nu_5=50\Rightarrow 6\nu_2+8=50\Rightarrow 6\nu_2=42\Rightarrow \nu_2=7$

$N_4=42\Rightarrow 4+7+18+\nu_4=42\Rightarrow \nu_4=13$

Γ. **α.** **Α:** «ο μαθητής έχει βαθμό από **10** έως **17**» τότε

$N(A)=\frac{1}{2}\cdot\nu_3+\nu_4+\frac{1}{4}\cdot\nu_5=9+13+2=24$ οπότε

$$P(A)=\frac{N(A)}{N(\Omega)}=\frac{24}{50}=0{,}48 \text{ ή } 48\%$$

β. **Β:** «ο μαθητής έχει βαθμό κάτω από **10** ή τουλάχιστον **16**»

$N(B)=\nu_1+\nu_2+\frac{1}{2}\nu_3+\nu_5=4+7+9+8=28$. Έτσι

$$P(B)=\frac{N(B)}{N(\Omega)}=\frac{28}{50}=0{,}56 \text{ ή } 56\%$$

ΘΕΜΑ 4

Α. Έχουμε : $2P(2)=\frac{P(3)}{3}=P(6)=P(k)=\frac{P(\lambda)}{2}=\theta\in R$

Αφού $P(A)=\frac{1}{2}\Rightarrow P(\kappa)+P(\lambda)+P(\mu)=\frac{1}{2}\Rightarrow\theta+2\theta+P(\mu)=\frac{1}{2}\Rightarrow$

$P(\mu)=\frac{1}{2}-3\theta \quad (1)$

Όμως $P(\Omega)=1 \Rightarrow P(2)+P(3)+P(6)+P(\kappa)+P(\lambda)+P(\mu)=1 \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$\frac{\theta}{2}+3\theta+\theta+\theta+2\theta+\frac{1}{2}-3\theta=1 \Rightarrow$

$4\theta+\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{9}{2}\theta=\frac{1}{2} \Rightarrow \theta=\frac{1}{9}$

Έτσι : $P(2)=\frac{1}{18}$, $P(3)=\frac{1}{3}$, $P(6)=\frac{1}{9}$, $P(\kappa)=\frac{1}{9}$, $P(\lambda)=\frac{2}{9}$, $P(\mu)=\frac{1}{6}$

Β. $\mathbf{f'(x)=\lambda x^2-24x+20}$

Αφού η **(ε) // (η)** $\Rightarrow \mathbf{f'(-1)=48 \Rightarrow \lambda+44=48 \Rightarrow \lambda=4}$

Έτσι $\mathbf{f'(x)=4x^2-24x+20}$

$\mathbf{f'(x)=0 \Rightarrow 4x^2-24x+20=0 \Rightarrow x=1,\ x=5}$

$\mathbf{x}$	$-\infty$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{5}$	$+\infty$
$\mathbf{f'(x)}$	$+$	-	$+$	
$\mathbf{f(x)}$	↗	↘	↗	

Άρα $\mathbf{\kappa=1}$ και $\mathbf{\mu=5}$

Έτσι $\mathbf{\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}}$

Γ. πρέπει $\begin{cases}\mathbf{2x-3\ge 0}\\ \mathbf{\sqrt{2x-3}-\sqrt{5}\ne 0}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{\sqrt{2x-3}\ne\sqrt{5}}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{2x-3\ne 5}\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\mathbf{x\ge 3/2}\\ \mathbf{x\ne 4}\end{cases}$

και αφού $\mathbf{x\in\Omega}$ άρα: $\mathbf{x=2}$ ή $\mathbf{x=3}$ ή $\mathbf{x=5}$ ή $\mathbf{x=6}$

έτσι $\mathbf{B=\{2,3,5,6\}}$

Δ. Οι **4** παρατηρήσεις είναι τα $\mathbf{\frac{4}{160}=\frac{1}{40}=2{,}5\%}$ του συνόλου των παρατηρήσεων.

Έτσι αφού έχω κανονική κατανομή πρέπει: $\mathbf{\bar{x}+2s=20}$ **(1)**

Όμως $\mathbf{R=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 6s=\frac{3}{4}\bar{x} \Rightarrow 24s=3\bar{x}}$ **(2)**

(2) $\mathbf{\overset{(1)}{\Rightarrow} 24s=3(20-2s) \Rightarrow 24s=60-6s \Rightarrow 30s=60 \Rightarrow s=2}$

Έτσι από **(1)** $\mathbf{\Rightarrow \bar{x}+4=20 \Rightarrow \bar{x}=16}$

Παρατηρούμε ότι: $\mathbf{CV=\frac{s}{\bar{x}}=\frac{2}{16}=\frac{1}{8}>\frac{1}{10}}$, έτσι το δείγμα δεν είναι ομοιογενές.

Προσθέτοντας τον ίδιο θετικό σταθερό αριθμό c σε όλες τις τιμές της μεταβλητής έχω: $\mathbf{s'=s=2}$ και $\mathbf{\bar{x}'=\bar{x}+c=16+c}$.

Για να είναι ομοιογενές το νέο δείγμα τιμών πρέπει:

$\mathbf{CV'\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{s'}{\bar{x}'}\le\frac{1}{10} \Rightarrow \frac{2}{16+c}\le\frac{1}{10} \Rightarrow}$

$\mathbf{20\le 16+c \Rightarrow c\ge 4}$ και αφού $\mathbf{c\in\Omega}$ έχω: $\mathbf{c=4}$ ή $\mathbf{c=5}$ ή $\mathbf{c=6}$

Έτσι $\mathbf{\Gamma=\{4,5,6\}}$

Ε. Έχουμε: $\mathbf{A \cap \Gamma = \{4,5\}}$

$\mathbf{B - \Gamma = \{2,3\}}$

$\mathbf{A \cup \Gamma = \{1,4,5,6\}}$

$\mathbf{B \cup A' = \{2,3,5,6\}}$, αφού $\mathbf{A' = \{2,3,6\}}$

Έτσι $\mathbf{P(A \cap \Gamma) = P(4) + P(5) = \frac{2}{9} + \frac{1}{6} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(B - \Gamma) = P(2) + P(3) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} = \frac{7}{18}}$

$\mathbf{P(A \cup \Gamma) = P(1) + P(4) + P(5) + P(6) = \frac{1}{9} + \frac{2}{9} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{11}{18}}$

$\mathbf{P(B \cup A') = P(2) + P(3) + P(5) + P(6) = \frac{1}{18} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{9} = \frac{12}{18}}$