ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω να αποδείξετε ότι ισχύει:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

(9 μονάδες)

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$;

(3 μονάδες)

Α3. Τι μας δίνουν τα μέτρα θέσης και τί τα μέτρα διασποράς ή μεταβλητότητας μιας κατανομής ενός συνόλου δεδομένων;

(3 μονάδες)

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η αθροιστική συχνότητα N_i μιας τιμής x_i εκφράζει το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μικρότερες της τιμής x_i.

β) Αν $f'(x) < 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε η συνάρτηση *f(x)* δεν παρουσιάζει ακρότατα.

γ) Σε μια κανονική κατανομή το 0,3% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται εκτός του διαστήματος $(\bar{x} - 3s,\ \bar{x} + 3s)$.

δ) Αν η διάμεσος ν παρατηρήσεων είναι ίση με μία από αυτές τότε είναι βέβαιο ότι το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι περιττός αριθμός.

ε) Αν Α,Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω τότε οι εκφράσεις «Δεν πραγματοποιούνται ταυτόχρονα τα ενδεχόμενα Α και Β» και «Πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β» είναι ισοδύναμες.

(2Χ5 μονάδες)

ΘΕΜΑ Β

Εξετάζουμε ένα αντιπροσωπευτικό δείγμα συνταξιούχων ως προς το ποσό της μηνιαίας συνολικής σύνταξης που λαμβάνουν σε εκατοντάδες ευρώ. Για την κατανομή τους έχουν δημιουργηθεί 5 ισοπλατείς κλάσεις και γνωρίζουμε ότι:

- το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων v_i είναι 250.
- το μέσο της άνω βάσης του ορθογωνίου του ιστογράμματος σχετικών συχνοτήτων $f_i\%$, που αντιστοιχεί στη $2^η$ κλάση είναι το σημείο Α(10,α).
- Το εύρος των παρατηρήσεων είναι 20.
- Η συχνότητα $f_1\%$ είναι τριπλάσια της $f_2\%$ και δεκαπλάσια της $f_4\%$, ενώ η $f_2\%$ είναι διπλάσια της $f_3\%$ και πενταπλάσια της $f_5\%$.

Β1. Να δείξετε ότι α=20 και να συμπληρωθεί ο πίνακας κατανομής όλων των συχνοτήτων.

(8 μονάδες)

Β2. Να υπολογιστεί η μέση τιμή, καθώς και η διάμεσος των συντάξεων. Τί είδους ασυμμετρία έχει η κατανομή;

(6 μονάδες)

Β3. Αν η κυβέρνηση αποφασίσει μείωση των συντάξεων που υπερβαίνουν τα 1300 ευρώ, βρείτε το ποσοστό των θιγόμενων συνταξιούχων καθώς και να εκτιμήσετε το πλήθος τους αν γνωρίζουμε ότι ο συνολικός αριθμός συνταξιούχων της χώρας είναι 2.850.000.

(5 μονάδες)

Β4. Αν δοθεί επίδομα στους έχοντες συνολικό ετήσιο εισόδημα (από συντάξεις 12 μηνών) μικρότερο ή ίσο των 8.640 ευρώ τότε:

i. Επιλέγοντας τυχαία από το δείγμα έναν συνταξιούχο, να βρεθεί η πιθανότητα να λάβει το επίδομα.

(3 μονάδες)

ii. Αν το επίδομα δοθεί από τα χρήματα, που θα εξοικονομήσουν τα ταμεία αφαιρώντας 100 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της $3^{ης}$ κλάσης, 200 ευρώ από κάθε συνταξιούχο της $4^{ης}$ και 400 ευρώ από καθέναν της $5^{ης}$ κλάσης και τα οποία μοιραστούν εξίσου στους δικαιούχους, τότε να βρεθεί το ποσό που αναμένεται να λάβει ανά μήνα ο κάθε δικαιούχος.

(3 μονάδες)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x)=\dfrac{3\sqrt{x}-6}{x-4}$ και $g(x)=2P(B)\cdot\ln x+\sqrt{x}+\dfrac{1}{16}x^2$ και τα Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω.

Γ1. Να βρείτε τα πεδία ορισμού των συναρτήσεων *f(x)* και *g(x)*.

(4 μονάδες)

Γ2. Αν η πιθανότητα P(A) του ενδεχομένου Α του δειγματικού χώρου Ω είναι ίση με το $\lim\limits_{x\to 4} f(x)$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της g(x) στο $x_0=4$ σχηματίζει με τον άξονα x΄x γωνία $\dfrac{\pi}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες P(A) και P(B).

(8 μονάδες)

Γ3. Αν $P(A)=\dfrac{3}{4}$ και $P(B)=\dfrac{1}{2}$ και $P(A\cap B)\in\left\{\dfrac{2}{3},\dfrac{2}{5},\dfrac{1}{6}\right\}$ τότε:

α) Να δείξτε ότι $P(A\cap B)=\dfrac{2}{5}$.

(5 μονάδες)

β) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί το Α ή να μην πραγματοποιηθεί το Β.

(4 μονάδες)

γ) Να βρείτε την πιθανότητα να πραγματοποιηθεί μόνο ένα από τα ενδεχόμενα Α και Β.

(4 μονάδες)

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=-x^4+2x^2+1,\ \ x\in\mathbb{R}$

Δ1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση *f* ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

(6 μονάδες)

Δ2. Έστω Ω ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης, που αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα και Α,Β δύο ενδεχόμενα για τα οποία ισχύει:

$f(P(B))=P(A)$, όπου f(x) η προηγούμενη συνάρτηση.

i. Να αποδείξετε ότι το Α είναι βέβαιο ενδεχόμενο και το Β είναι αδύνατο ενδεχόμενο.

(7 μονάδες)

ii. Δίνεται ο παρακάτω πίνακας απόλυτων συχνοτήτων ν_i και τα ενδεχόμενα Γ,Δ του ίδιου δειγματικού χώρου Ω, διαφορετικά των Α και Β με $\Gamma \subseteq \Delta$ και $\Gamma \neq \Delta$.

x_i	ν_i
1	2P(Γ)
2	4P(Δ)
3	4P(Γ)+4P(Δ)
4	P(A)
Σύνολα	

α) Να αποδείξετε ότι $\nu_1=1$ και $\nu_2=3$ και να συμπληρωθεί ο πίνακας.

(6 μονάδες)

β) Να υπολογιστεί η διάμεσος των παρατηρήσεων.

(3 μονάδες)

γ) Να υπολογιστούν οι πιθανότητες**:**
$P(\Gamma \cap \Delta)$, $P(\Gamma \cup \Delta)$.

(3 μονάδες)

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ / ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 1 Απριλίου 2012

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελ. 151.

Α2. Σχολικό βιβλίο σελ. 14.

Α3. Σχολικό βιβλίο σελ. 84 (Τα μέτρα θέσης μας δίνουν τη θέση του «κέντρου» των παρατηρήσεων στον οριζόντιο άξονα και τα μέτρα διασποράς την διασπορά των παρατηρήσεων, δηλαδή πόσο αυτές εκτείνονται γύρω από το «κέντρο» τους.

Α4. α→Λ, β→Σ, γ→Σ, δ→Λ, ε→Λ.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Αφού το εμβαδόν του πολυγώνου συχνοτήτων είναι 250 θα είναι ν=250 όπου ν το πλήθος των συνταξιούχων του δείγματος.

Το πλάτος c κάθε μιας από τις 5 κλάσεις θα είναι $\frac{R}{5}=\frac{20}{5}=4$.

Αφού το μέσο της δεύτερης κλάσης έχει τετμημένη 10 θα είναι x_2=10 και αν η πρώτη κλάση είναι [κ,κ+c) η δεύτερη θα είναι [κ+c, κ+2c) και θα είναι:

$$x_2=\frac{\kappa+c+\kappa+2c}{2}\Leftrightarrow 10=\frac{\kappa+4+\kappa+8}{2}\Leftrightarrow 2\kappa+12=20\Leftrightarrow \kappa=4.$$

Αφού $f_2\%=a$ θα είναι σύμφωνα με τα δεδομένα

$$f_1\%=3a,\ f_3\%=\frac{a}{2},\ f_4\%=\frac{3a}{10},\ f_5\%=\frac{a}{5}.$$

Όμως $f_1\%+f_2\%+f_3\%+f_4\%+f_5\%=100\Leftrightarrow 3a+a+\frac{a}{2}+\frac{3a}{10}+\frac{a}{5}=100\Leftrightarrow a=20.$

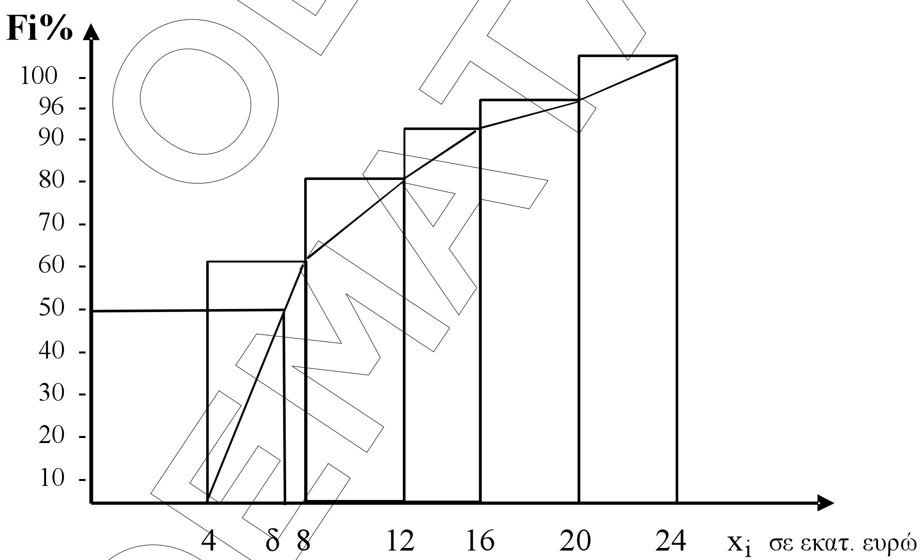
Άρα ο πίνακας συχνοτήτων γράφεται:

Κλάσεις	x_i	$f_i\%$	f_i	ν_i	N_i	$F_i\%$	F_i	$x_i \cdot \nu_i$
[4-8)	6	60	0,60	150	150	60	0,60	900
[8-12)	10	20	0,20	50	200	80	0,80	500
[12-16)	14	10	0,10	25	225	90	0,90	350
[16-20)	18	6	0,06	15	240	96	0,96	270
[20-24)	22	4	0,04	10	250	100	1	220
ΣΥΝΟΛΑ		100	1	250				2240

Για τις συχνότητες ν_i χρησιμοποιήσαμε τον τύπο $\nu_i = f_i \cdot \nu$.

Β2. Για τη μέση τιμή των συντάξεων έχουμε $\bar{x} = \dfrac{\sum_{i=1}^{5} x_i \cdot \nu_i}{\nu} = \dfrac{2240}{250} = 8,96$ εκατοντάδες ευρώ, δηλαδή 896 ευρώ.

Για την εύρεση της διαμέσου των συντάξεων σχηματίζουμε το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων $F_i\%$.



Από αυτό έχουμε $\dfrac{\delta - 4}{8-4} = \dfrac{50-0}{60-0} \Leftrightarrow \delta - 4 = \dfrac{4 \cdot 5}{6} \Leftrightarrow \delta \simeq 4 + 3,33 \simeq 7,33$.

Αφού $\bar{x} > \delta$ η κατανομή παρουσιάζει θετική ασυμμετρία.

Β3. Πάνω από 1300 ευρώ δηλαδή από 13 εκατοντάδες είναι τα $\frac{16-13}{16-12}$ της $3^{ης}$ κλάσης και όλοι που είναι στην $4^{η}$ και στην $5^{η}$ κλάση, δηλαδή ποσοστό $\left(\frac{3}{4}\cdot 10+6+4\right)\%=17,5\%$ δηλαδή $\frac{17,5}{100}\cdot 2850000=498750$ συνταξιούχοι.

Β4. Μέγιστο ετήσιο εισόδημα 8640 ευρώ σημαίνει ότι το μέγιστο μηνιαίο εισόδημα είναι $\frac{8640}{12}=720$ ευρώ, δηλαδή 7,2 εκατοντάδες ευρώ.

i. Από 4-7,2 εκατοντάδες ευρώ ανήκουν $\frac{7,2-4}{8-4}=\frac{3,2}{4}=0,80$=80% των συνταξιούχων της πρώτης κλάσης, δηλαδή ποσοστό $0,80\cdot 60=48\%$ του συνόλου των συνταξιούχων. Άρα η ζητούμενη πιθανότητα είναι 48%.

ii. Το ποσό που θα αφαιρεθεί από τις ανώτερες κλάσεις του δείγματος ανά μήνα είναι $100\cdot 25+200\cdot 15+400\cdot 10=2500+3000+4000=9500$ ευρώ και θα διανεμηθεί σε $\frac{80}{100}\cdot 150=120$ της $1^{ης}$ κλάσης. Άρα καθένας από τους δικαιούχους θα πάρει $\frac{9500}{120}=79,16$ ευρώ ανά μήνα.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για την f(x) πρέπει να ισχύουν: ($x\geq 0$ και $x-4\neq 0$). Άρα $A_f=[0,4)\cup(4,+\infty)$.
Για την g(x) πρέπει να ισχύουν: ($x>0$ και $x\geq 0$) δηλαδή x>0. Άρα $A_g=(0,+\infty)$.

Γ2. $\lim\limits_{x\to 4} f(x)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3\sqrt{x}-6}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3\left(\sqrt{x}-2\right)}{\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 4}\frac{3}{\sqrt{x}+2}=\frac{3}{4}=\text{P(A)}$.

Είναι: $g'(x)=\frac{2\text{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{16}2x=\frac{2\text{P(B)}}{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{x}{8}$

οπότε $g'(4)=\frac{2\text{P(B)}}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{8}$.

Αν $\omega=\frac{\pi}{4}$ τότε

εφω=εφ$\frac{\pi}{4}=1=g'(4)\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=1\Leftrightarrow\frac{2P(B)}{4}=\frac{1}{4}\Leftrightarrow P(B)=\frac{1}{2}$.

Γ3. **α** Αν $P(A\cap B)=\frac{2}{3}>\frac{1}{2}=P(B)$ άτοπο γιατί $(A\cap B)\subseteq B$.

Αν $P(A\cap B)=\frac{1}{6}$ τότε $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=$

$$=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}=\frac{9}{12}+\frac{6}{12}-\frac{2}{12}=\frac{13}{12}>1 \text{ άτοπο.}$$

Άρα $P(A\cap B)=\frac{2}{5}$.

β $P(A\cup B')=P(A)+P(B')-P(A\cap B')=P(A)+1-P(B)-P(A-B)=$

$$=P(A)+1-P(B)-P(A)+P(A\cap B)=1-\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{1}{2}+\frac{2}{5}=\frac{9}{10}.$$

γ. $P[(A-B)\cup(B-A)]=$

$=P(A-B)+P(B-A)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$

$=\frac{3}{4}-\frac{2}{5}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}-\frac{4}{5}=\frac{15}{20}+\frac{10}{20}-\frac{16}{20}=\frac{9}{20}$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f'(x)=-4x^3+4x=-4x\cdot(x^2-1)$

x	$-\infty$	-1		0		1	$+\infty$
-4x	+		+	0	−		−
x^2-1	+	0	−		−	0	+
f΄(x)	+	0	−	0	+	0	−
f(x)	↗		↘		↗		↘

Άρα η $f\uparrow(-\infty,-1]$, $f\downarrow[-1,0]$, $f\uparrow[0,1]$, $f\downarrow[1,+\infty)$.

Έχει τοπικό μέγιστο για x_1=-1 το $f(-1)=2$ και για x_3=1 το $f(1)=2$ και τοπικό ελάχιστο για x_2=0 το f(0)=1.

Δ2. i) Είναι: $0 \le P(B) \le 1$ και f $\uparrow$ στο $[0,1]$.
Συνεπώς: $f(0) \le f\left(P(B)\right) \le f(1) \Leftrightarrow 1 \le P(A) \le 2$ και $0 \le P(A) \le 1$ και αφού ο δειγματικός χώρος αποτελείται από ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα P(A)=1 και A=Ω.

Ακόμα:
$f\left(P(B)\right) = P(A) \Leftrightarrow -P^4(B) + 2P^2(B) + 1 = 1 \Leftrightarrow P^2(B)\cdot\left(2 - P^2(B)\right) = 0 \Leftrightarrow$
$P(B) = 0$ ή $P(B) = \pm\sqrt{2}$ απορ. αφού $0 \le P(B) \le 1$
Άρα P(B)=0 και $B = \varnothing$.

Δ2. ii. α)

- $\Gamma \ne A = \Omega$ και $\Gamma \ne B = \varnothing$
  Άρα:
  $0 < P(\Gamma) < 1 \Leftrightarrow 0 < 2P(\Gamma) < 2 \Leftrightarrow 0 < \nu_1 < 2$ και $\nu_1 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_1 = 1$,
  οπότε $P(\Gamma) = \frac{1}{2}$
- $\Delta \ne \Omega, \varnothing$ και $\Gamma \subseteq \Delta$, $\Gamma \ne \Delta$
  Άρα:
  $P(\Gamma) < P(\Delta) < 1 \Leftrightarrow 4P(\Gamma) < 4P(\Delta) < 4 \Leftrightarrow 2 < \nu_2 < 4$ και $\nu_2 \in \mathbb{N} \Rightarrow \nu_2 = 3$,
  οπότε $P(\Delta) = \frac{3}{4}$.

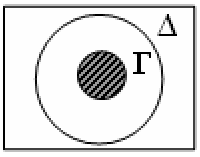
Συνεπώς:

x_i	ν_i
1	1
2	3
3	5
4	1
	ν=10

β) $\delta = \frac{t_5 + t_6}{2} = \frac{3+3}{2} = 3$.

γ) Είναι $\Gamma \cap \Delta = \Gamma$

οπότε $P(\Gamma \cap \Delta) = P(\Gamma) = \frac{1}{2}$



και $\Gamma \cup \Delta = \Delta$ οπότε $P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Delta) = \frac{3}{4}$