ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του x_0, στο οποίο όμως η f είναι συνεχής. Αν $f'(x)>0$ στο $(α, x_0)$ και $f'(x)<0$ στο $(x_0, β)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ είναι τοπικό μέγιστο της f

Μονάδες 7

Α2. Πότε δύο συναρτήσεις f και g λέγονται ίσες;

Μονάδες 2

Α3. Να διατυπώσετε το θεώρημα Rolle.

Μονάδες 6

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η γραφική παράσταση της συνάρτησης –f είναι συμμετρική, ως προς τον άξονα x΄x, της γραφικής παράστασης της f

β) Η διανυσματική ακτίνα του αθροίσματος των μιγαδικών α+βi και γ+δi είναι το άθροισμα των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Αν είναι 0<α<1, τότε $\lim_{x\to+\infty} α^x = +\infty$

δ) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0, τότε δεν μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0

ε) Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα [α, β]. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο [α, β], τότε

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\alpha) - G(\beta)$$

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, με $z \neq -1$, για τους οποίους ο αριθμός $w = \dfrac{z-1}{z+1}$ είναι φανταστικός.

Να αποδείξετε ότι:

Β1. $|z| = 1$

Μονάδες 7

Β2. Ο αριθμός $\left(z - \dfrac{1}{z}\right)^4$ είναι πραγματικός.

Μονάδες 6

Β3. $\left(\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{z_2}\right)(z_1+z_2) \leq 4$, όπου z_1, z_2 δύο από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z

Μονάδες 6

Β4. Οι εικόνες των μιγαδικών αριθμών u, για τους οποίους ισχύει $u - ui = \dfrac{i}{w} - w$, $w \neq 0$, ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει:

$$xf(x) + 1 = e^x, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\begin{cases} \dfrac{e^x-1}{x}, & x\neq 0 \\ 1, & x=0 \end{cases}$

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} και να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0,f(0))$. Στη συνέχεια, αν είναι γνωστό ότι η f είναι κυρτή, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$2f(x)=x+2,\ x\in\mathbb{R}$$

έχει ακριβώς μία λύση.

Μονάδες 8

Γ4. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 0^+}\left[x(\ell n x)\ell n(f(x))\right]$

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:A\to\mathbb{R}$ με $A=(0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(A)=(-\infty,0]$
- η παράγωγος της f είναι συνεχής στο $(0,+\infty)$, και
- $2f(x)+\left(x+\dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)}=\displaystyle\int_1^x e^{f(t)}f'(t)\left(t+\frac{1}{t}\right)dt+2$, για κάθε $x>0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση $F(x)=\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(\dfrac{2x}{x^2+1}\right)$, $x>0$

Μονάδες 8

Δ2. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της F έχει μοναδικό σημείο καμπής $\Sigma\left(x_0, F(x_0)\right)$, $x_0>0$, το οποίο και να βρείτε. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό $\xi\in(x_0, \beta)$ με $\beta>x_0$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της F στο σημείο $M\left(\xi, F(\xi)\right)$ να είναι παράλληλη προς την ευθεία

$$\varepsilon:\ F(\beta)\,x-(\beta-1)y+2012\,(\beta-1)=0$$

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\beta>1$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\frac{\left[F(\beta)+(1-\beta)f(\beta)\right]x^5}{x-1}+\frac{(\beta-1)(x+1)^3}{x-3}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα, ως προς x, στο διάστημα $(1,3)$

Μονάδες 5

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right)dt \le \int_1^x t\,f(t)\,dt, \quad \text{για κάθε} \quad x>0$$

Μονάδες 6

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **<u>Να μην αντιγράψετε</u>** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **<u>Δεν επιτρέπεται να γράψετε</u>** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18.30

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 14 ΙΟΥΝΙΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 262

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 141

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 246

Α4. **α.** Σωστό , **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow \overline{\left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)} = -\dfrac{z-1}{z+1} \Leftrightarrow \dfrac{\bar{z}-1}{\bar{z}+1} = \dfrac{1-z}{z+1} \Leftrightarrow$

$(\bar{z}-1)(z+1) = (1-z)(\bar{z}+1) \Leftrightarrow z\bar{z} + \cancel{\bar{z}} \cancel{-z} - 1 = \cancel{\bar{z}} - 1 - z\bar{z} \cancel{-z} \Leftrightarrow$

$2z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$

Β2. $|z|^2 = 1 \Leftrightarrow z\bar{z} = 1 \Leftrightarrow \bar{z} = \dfrac{1}{z}$ (1)

$$\left(z - \frac{1}{z}\right)^4 \overset{(1)}{=} (z - \bar{z})^4 = \left[2\mathrm{Im}(z)i\right]^4 = 16\,\mathrm{Im}^4(z)i^4 = 16\,\mathrm{Im}^4(z) \in IR$$

Β3. Ισχύουν : $\bar{z}_1 = \dfrac{1}{z_1}$ (2) και $\bar{z}_2 = \dfrac{1}{z_2}$ (3)

$$\left(\frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2}\right)(z_1 + z_2) \underset{(3)}{\overset{(2)}{=}} (\bar{z}_1 + \bar{z}_2)(z_1 + z_2) = |z_1 + z_2|^2 \le \left(|z_1| + |z_2|\right)^2 = 4$$

Β4. $w \in I$, άρα $w = \beta i$, με $\beta \in IR$

Έστω $u = x + yi$, με $x, y \in IR$

$u - ui = \dfrac{i}{w} - w \Leftrightarrow x + yi - (x + yi)i = \dfrac{i}{\beta i} - \beta i \Leftrightarrow$

$x + yi - xi + y = \dfrac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow (x + y) + (y - x)i = \dfrac{1}{\beta} - \beta i \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y = \dfrac{1}{\beta} \\ y - x = -\beta \end{cases} \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} y^2 - x^2 = -1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 1$$

άρα οι εικόνες του u ανήκουν στην υπερβολή $x^2 - y^2 = 1$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $x \cdot f(x) + 1 = e^x \;\Leftrightarrow\; x \cdot f(x) = e^x - 1$

- Για $x \neq 0$ είναι $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$
- $f(0) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1$

Άρα $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x}, & \text{αν } x \neq 0 \\ 1, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Γ2. • Για $x \neq 0$ είναι $f'(x) = \left(\dfrac{e^x - 1}{x}\right)' = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

- $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\dfrac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2}$

$$\underset{DL'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} \underset{DL'H}{=} \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2}$$

Άρα $f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}, & \text{αν } x \neq 0 \\ \dfrac{1}{2}, & \text{αν } x = 0 \end{cases}$

Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = xe^x - e^x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

$g'(x) = xe^x$, $x \in \mathbb{R}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
g	↘		↗

$g_{min} = g(0) = 0$, άρα $g(x) > 0$, για κάθε $x \neq 0$.

Επομένως $f'(x) > 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα f γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$, άρα f "1 – 1", άρα f αντιστρέψιμη.

$$\left.\begin{aligned}&\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x-1}{x} = 0\\&\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x-1}{x} \underset{DL'H}{=} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = +\infty\end{aligned}\right\}\overset{f\uparrow}{\Rightarrow}$$

$$D_{f^{-1}} = f(IR) = \left(\lim_{x\to-\infty} f(x)\,,\ \lim_{x\to+\infty} f(x)\right) = (0\,,\,+\infty)$$

Γ3. $(\varepsilon):\ y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \iff (\varepsilon):\ y - 1 = \frac{1}{2}x \iff (\varepsilon):\ y = \frac{1}{2}x + 1$

1^{ος} τρόπος

Η f είναι κυρτή στο IR, άρα η C_f βρίσκεται πάνω από την εφαπτομένη (ε) με εξαίρεση το σημείο επαφής Α (0 , 1), άρα

$f(x) \geq \frac{1}{2}x + 1 \overset{\cdot 2}{\iff} 2f(x) \geq x + 2$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

2^{ος} τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h, με $h(x) = 2f(x) - x - 2,\ x \in IR$

Είναι $h'(x) = 2f'(x) - 1,\ x \in IR$

$x_1 < x_2 \underset{f'\uparrow}{\overset{f \text{ κυρτή}}{\iff}} f'(x_1) < f'(x_2) \iff 2f'(x_1) < 2f'(x_2) \iff$

$2f'(x_1) - 1 < 2f'(x_2) - 1 \iff h'(x_1) < h'(x_2)$

άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο IR,

επομένως η $h(x) = 0$ έχει το πολύ μια ρίζα στο IR.

$h(0) = 2f(0) - 2 = 0$, άρα η $h(x) = 0$ έχει μοναδική ρίζα το 0.

Επομένως η εξίσωση $2f(x) = x + 2$ έχει ακριβώς μια λύση την $x = 0$.

Γ4.
- $\lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln x}{\frac{1}{x}} \underset{DL'H}{=} \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0$
- $\lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] \underset{\lim_{x\to 0^+} f(x) = 1}{\overset{f(x)=u}{=}} \lim_{u\to 1}\ln u = 0$

άρα $\lim_{x\to 0^+}\left[x\cdot \ln x\cdot \ln\left(f(x)\right)\right] = \lim_{x\to 0^+}(x\cdot \ln x)\cdot \lim_{x\to 0^+}\left[\ln\left(f(x)\right)\right] = 0\cdot 0 = 0$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $2f(x) + \left(x + \dfrac{1}{x}\right)e^{f(x)} = \int_1^x e^{f(t)} \cdot f(t)\left(t + \dfrac{1}{t}\right) dt + 2, \ \ x > 0$ **(1)**

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$2f'(x) + \left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} + \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right)} = \cancel{e^{f(x)} \cdot f(x)\left(x + \frac{1}{x}\right)} \ \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = -\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)e^{f(x)} \ \Leftrightarrow \ -2e^{-f(x)}f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} \ \Leftrightarrow$$

$$\left[2e^{-f(x)}\right]' = \left(x + \frac{1}{x}\right)'$$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. προκύπτει ότι $2e^{-f(x)} = x + \dfrac{1}{x} + c$ **(2)**

Από την (1) για $x = 1$ έχουμε :

$2f(1) + 2e^{f(1)} = 2 \ \Leftrightarrow \ f(1) + e^{f(1)} = 1$

Θεωρούμε τη συνάρτηση S, με $S(x) = x + e^x, \ x \in \mathbb{R}$

Είναι $S'(x) = 1 + ex > 0$,

άρα η S είναι γνησίως αύξουσα

άρα η S είναι "1 - 1".

$$f(1) + e^{f(1)} = 1 \ \Leftrightarrow \ S(f(1)) = S(0) \ \overset{S\text{ "1 - 1"}}{\Leftrightarrow} \ f(1) = 0$$

$$(2) \overset{x = 1}{\Rightarrow} 2e^{-f(1)} = 2 + c \ \overset{f(1) = 0}{\Leftrightarrow} \ 2 = 2 + c \ \Leftrightarrow \ c = 0$$

$$(2) \overset{c = 0}{\Rightarrow} 2e^{-f(x)} = x + \frac{1}{x} \ \Leftrightarrow \ \frac{2}{e^{f(x)}} = \frac{x^2 + 1}{x} \ \Leftrightarrow \ \frac{e^{f(x)}}{2} = \frac{x}{x^2 + 1} \ \Leftrightarrow$$

$$e^{f(x)} = \frac{2x}{x^2 + 1} \ \Leftrightarrow \ \mathbf{f(x) = \ell n\left(\frac{2x}{x^2 + 1}\right), \ x > 0}$$

Δ2. $F'(x) = \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' = f(x),\ x > 0$

$$F''(x) = f'(x) = \left[\ell n\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1}{\frac{2x}{x^2+1}} \cdot \left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'$$

$$= \frac{\cancel{x^2+1}}{2x} \cdot \frac{2\left(x^2+1\right) - 2x \cdot 2x}{\left(x^2+1\right)^{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{2}\left(1-x^2\right)}{\cancel{2}x \cdot \left(x^2+1\right)}$$

$$= \frac{(1-x)(1+x)}{x \cdot \left(x^2+1\right)},\ x > 0$$

Το πρόσημο της f'' άρα και την κυρτότητα της f την καθορίζει ο παράγοντας $(1 - x)$

x	0	1	$+\infty$
$F''(x)$	+	0	-
F	$\cup$		$\cap$

σ.κ.

$F(1) = \int_1^1 f(t)\,dt = 0$, άρα σημείο καμπής της C_F το $\Sigma(1, 0)$

Η F είναι παραγωγίσιμη στο $[1, \beta]$

Από Θ.Μ.Τ. υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε

$$F'(\xi) = \frac{F(\beta) - F(1)}{\beta - 1} = \frac{F(\beta)}{\beta - 1} = \lambda_\varepsilon$$

άρα υπάρχει $\xi \in (1, \beta)$, τέτοιο ώστε η εφαπτομένη της C_F στο σημείο της $M(\xi, F(\xi))$ είναι παράλληλη στην (ε).

Είναι $F''(x) < 0$ στο $[1, \beta]$,

άρα η F' είναι γνησίως φθίνουσα στο $[1, \beta]$,

άρα το ξ είναι μοναδικό.

Δ3. Θεωρούμε συνάρτηση φ, με

$$\varphi(x) = (x - 3)[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)] + (\beta - 1)(x - 1)(x + 1)^3, x \in [1, 3]$$

- Η φ συνεχής στο $[1, 3]$ ως πράξεις συνεχών
- $\varphi(1) = -2\cdot[F(\beta) + (1 - \beta)\cdot f(\beta)] < 0$, διότι

$$\boxed{1 < \xi < \beta \overset{F'\downarrow \text{ στο } [1, +\infty)}{\Rightarrow} F'(\xi) > F'(\beta) \Leftrightarrow \frac{F(\beta)}{\beta - 1} > f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) > (\beta - 1)\cdot f(\beta) \Leftrightarrow F(\beta) + (1 - \beta)\cdot f(\beta) > 0}$$

- $\varphi(3) = 128\cdot(\beta - 1) > 0$

Από Θ. Bolzano υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_1 \in (1, 3)$, τέτοιο ώστε $\varphi(x_1) = 0 \Leftrightarrow$

$$(x_1 - 3)[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)] + (\beta - 1)(x_1 - 1)(x_1 + 1)^3 = 0 \underset{x_1 - 1 \neq 0}{\overset{x_1 - 3 \neq 0}{\Leftrightarrow}}$$

$$\frac{\cancel{(x_1 - 3)}[F(\beta) + (1 - \beta)f(\beta)]}{\cancel{(x_1 - 3)}\cdot(x_1 - 1)} + \frac{(\beta - 1)\cancel{(x_1 - 1)}(x_1 + 1)^3}{(x_1 - 3)\cdot\cancel{(x_1 - 1)}} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\frac{F(\beta) + (1 - \beta)\cdot f(\beta)}{x_1 - 1} + \frac{(\beta - 1)\cdot(x_1 + 1)^3}{x_1 - 3} = 0$$

άρα η εξίσωση $\dfrac{F(\beta) + (1 - \beta)\cdot f(\beta)}{x - 1} + \dfrac{(\beta - 1)\cdot(x + 1)^3}{x - 3} = 0$

έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(1, 3)$.

Δ4. Θα δείξουμε ότι για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \leq \int_1^x t\cdot f(t)\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x\cdot f(u)\, du \leq \int_1^x t\cdot f(t)\, dt \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x x\cdot f(t)\, dt \leq \int_1^x t\cdot f(t)\, dt \quad \textbf{(1)}$$

$\dfrac{t}{x} = u \Leftrightarrow t = ux$

$dt = x\, du$

t	x	x^2
u	1	x

$1^{ος}$ τρόπος

Θεωρούμε τη συνάρτηση h,

με $h(x) = x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt,\ x > 0$

$$h'(x) = \left(x \cdot \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$$

$$= (x)' \cdot \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot \left(\int_1^x f(t)\,dt\right)' - \left(\int_1^x t \cdot f(t)\,dt\right)'$$

$$= \int_1^x f(t)\,dt + x \cdot f(x) - x \cdot f(x) = \int_1^x f(t)\,dt = F(x)$$

$f(A) = (-\infty\,, 0]$, άρα $f(x) \le 0 \Leftrightarrow -f(x) \ge 0$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 1$

- αν $0 < x < 1$, τότε $\int_x^1 -f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$

$\int_1^x f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) > 0$

- αν $x > 1$, τότε $\int_1^x -f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow$

$-\int_1^x f(t)\,dt > 0 \Leftrightarrow h'(x) < 0$

x	0		1		$+\infty$
h΄(x)		+	0	-	
h		↗		↘	

$h_{max} = h(1) = 0$

Επομένως για κάθε $x > 0$ είναι :

$$h(x) \le 0 \Leftrightarrow \int_1^x f(t)\,dt - \int_1^x t \cdot f(t)\,dt \le 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \le \int_1^x t \cdot f(t)\,dt$$

$2^{ος}$ τρόπος

- αν $0 < x \le t \le 1$, τότε :

$$\left.\begin{aligned} x - t \le 0 \\ f(t) \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-t)\cdot f(t) \ge 0, \text{ άρα}$$

$$\int_x^1 (x-t)\cdot f(t)\,dt \ \ge\ 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t)\,dt - \int_x^1 tf(t)\,dt \ \ge\ 0 \ \Leftrightarrow$$

$$\int_x^1 xf(t)\,dt \ \ge\ \int_x^1 tf(t)\,dt \ \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt \ \ge\ -\int_1^x tf(t)\,dt \ \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t)\,dt \ \le\ \int_1^x tf(t)\,dt$$

- αν $1 \le t \le x$, τότε :

$$\left.\begin{aligned} x - t \ge 0 \\ f(t) \le 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow (x-t)\cdot f(t) \le 0 \ \Leftrightarrow\ -(x-t)\cdot f(t) \ge 0, \text{ άρα}$$

$$\int_1^x -(x-t)\cdot f(t)\,dt \ \ge\ 0 \ \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt + \int_1^x tf(t)\,dt \ \ge\ 0 \ \Leftrightarrow$$

$$-\int_1^x xf(t)\,dt \ \ge\ -\int_1^x tf(t)\,dt \ \Leftrightarrow$$

$$\int_1^x xf(t)\,dt \ \le\ \int_1^x tf(t)\,dt$$

Επομένως για κάθε $x > 0$ ισχύει :

$$\int_1^x xf(t)\,dt \ \le\ \int_1^x tf(t)\,dt \ \overset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$$\int_x^{x^2} f\left(\frac{t}{x}\right) dt \ \le\ \int_1^x t\cdot f(t)\,dt$$