ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Τι ονομάζεται διάμεσος δ ενός δείγματος ν παρατηρήσεων που έχουν διαταχθεί σε αύξουσα σειρά;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. (Μονάδες 2)

β) Το εύρος ως παράμετρος διασποράς εξαρτάται μόνο από τις ακραίες τιμές της μεταβλητής.

(Μονάδες 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [α,β]. Τότε ισχύει η ακόλουθη ιδιότητα για το ορισμένο ολοκλήρωμα: $\int_\alpha^\gamma f(x)dx + \int_\beta^\gamma f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(x)dx$, με $\alpha<\gamma<\beta$. (Μονάδες 2)

δ) Ισχύει ότι: $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$, $\alpha \in \mathbb{R}^*$, $x>0$ (Μονάδες 2)

ε) Έστω δύο συνεχείς συναρτήσεις f, g: [α, β] $\to \mathbb{R}$ με συνεχείς παραγώγους f΄, g΄. Τότε ισχύει ότι:
$$\int_\alpha^\beta f'(x)g(x)dx = [f(x)g(x)]_\alpha^\beta - \int_\alpha^\beta f(x)g'(x)dx$$ (Μονάδες 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) $\int_\alpha^\beta \frac{1}{x}dx = \ldots$ με $\beta>\alpha>0$ (Μονάδες 3)

β) Έστω συναρτήσεις f: Α $\to \mathbb{R}$ και g: Β $\to \mathbb{R}$ με $f(A) \subseteq B$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε κάθε $x \in A$ και η g παραγωγίσιμη σε κάθε $f(x) \in B$, τότε η σύνθεσή τους gof: Α $\to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο Α και ισχύει ότι:

(gof)΄(x)=... (Μονάδες 3)

γ) $\int_\alpha^\beta c\,dx = \ldots$ με c σταθερά και $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ (Μονάδες 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Στον παρακάτω πίνακα δίνονται οι ημερήσιες ώρες διαβάσματος 25 μαθητών μιας τάξης ενός ΕΠΑ.Λ.

Ημερήσιες ώρες διαβάσματος x_i	Μαθητές ν_i	Αθροιστική Συχνότητα N_i	Σχετική συχνότητα (%) $f_i\%$	$x_i\nu_i$
1	6			
2	5			
3	4			
4	κ			
5	2κ+1			
Σύνολα	ν=25		100	

Β1. Να υπολογίσετε τον αριθμό κ

Μονάδες 4

Β2. Για κ=3 να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα.

Μονάδες 8

Β3. Για κ=3 να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ και να βρείτε τη διάμεσο δ των παρατηρήσεων.

Μονάδες 10

Β4. Για κ=3 να υπολογίσετε το ποσοστό των μαθητών που διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες ημερησίως.

Μονάδες 3

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2}, & \text{αν } x > 1 \\ \\ \alpha x^2 + \beta x, & \text{αν } x \leq 1 \end{cases} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x)$

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

Μονάδες 10

Γ3. Να υπολογίσετε τα α και β, ώστε η f να είναι συνεχής στο $x_0=1$ και η γραφική παράσταση της f να διέρχεται από το σημείο Α(-1,2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

Δ1. Να βρείτε την παράγουσα F της f, αν $F(0)=1$.

Μονάδες 5

Δ2. Αν $F(x)=x^3-x^2-x+1$, $x\in\mathbb{R}$ να μελετήσετε τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά ακρότατα της F.

Μονάδες 8

Δ3. Να συγκρίνετε τις τιμές F(2011) και F(2012) και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 5

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου Ω που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, τον άξονα x΄x και τις ευθείες με εξισώσεις $x=0$ και $x=1$.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Να μη χρησιμοποιήσετε το χαρτί μιλιμετρέ.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 24 ΜΑΪΟΥ 2012
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 81

Α2. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

Α3. **α.** $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\,dx = [\ell n x]_{\alpha}^{\beta} = \ell n\beta - \ell n\alpha$, με $\beta > \alpha > 0$

β. $(g o f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

γ. $\int_{\alpha}^{\beta} c\,dx = c(\beta - \alpha)$, με c σταθερά και $\alpha, \beta \in IR$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow 3\kappa + 16 = 25 \Leftrightarrow 3\kappa = 9 \Leftrightarrow$ **$\kappa = 3$**

Β2. Για $\kappa = 3$

x_i	ν_i	N_i	$f_i\%$	$x_i \cdot \nu_i$
1	6	6	24	6
2	5	11	20	10
3	4	15	16	12
4	3	18	12	12
5	7	25	28	35
ΣΥΝΟΛΑ	25		100	75

Β3. $\bar{x} = \frac{\sum x_i \nu_i}{\nu} = \frac{75}{25} = \mathbf{3}$ ώρες

Το πλήθος των παρατηρήσεων είναι 25.
Αν γραφούν με αύξουσα σειρά η μεσαία παρατήρηση στη 13^{η} θέση είναι 3, άρα **η διάμεσος είναι 3**.

Β4. $f_3\% + f_4\% + f_5\% = 16\% + 12\% + 28\% = 56\%$
άρα το 56% των μαθητών διαβάζουν τουλάχιστον 3 ώρες.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+}\left(\alpha x^2 + \beta x\right) = \boldsymbol{\alpha + \beta}$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x-1}{\sqrt{x+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{(x-1)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\left(\sqrt{x+3}-2\right)\left(\sqrt{x+3}+2\right)}$

$$= \lim_{x\to 1^-}\frac{\cancel{(x-1)}\left(\sqrt{x+3}+2\right)}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1^-}\left(\sqrt{x+3}+2\right) = \mathbf{4}.$$

Γ3. • $A(-1\,,\,2) \in C_f \Leftrightarrow f(-1) = 2 \Leftrightarrow \alpha(-1)^2 + \beta(-1) = 2 \Leftrightarrow$
$\alpha - \beta = 2 \Leftrightarrow \alpha = \beta + 2 \;\; (1)$

• Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει

$\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$\alpha + \beta = 4 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \beta + 2 + \beta = 4 \Leftrightarrow 2\beta = 2 \Leftrightarrow \boldsymbol{\beta = 1}$

$(1) \overset{\beta = 1}{\Rightarrow} \boldsymbol{\alpha = 3}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$F(x) = 3\dfrac{x^3}{3} - 2\dfrac{x^2}{2} - x + c = x^3 - x^2 - x + c$

$F(0) = 1 \Leftrightarrow c = 1$, άρα $\mathbf{F(x) = x^3 - x^2 - x + 1}$

Δ2. $F'(x) = f(x) = 3x^2 - 2x - 1$

$F'(x) = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$ ή $x = 1$

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $\left(-\infty, -\frac{1}{3}\right]$ και $[1, +\infty)$

ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left[-\frac{1}{3}, 1\right]$.

Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = -\frac{1}{3}$ την τιμή

$$f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \mathbf{\frac{32}{27}}$$

Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για x = 1 την τιμή

$f(1) = 1^3 - 1^2 + 1 - 1 = \mathbf{0}$

Δ3. Η F είναι γνησίως αύξουσα στο $[1, +\infty)$, άρα

$2011 < 2012 \Rightarrow$ **$F(2011) < F(2012)$**

Δ4. $f(x) = 3x^2 - 2x - 1 = F'(x)$

Το πρόσημο της F΄ το έχουμε βρεί στο Δ2 ερώτημα

Ειναι $f(x) \leq 0$, στο $[0, 1]$ άρα

$E = -\int_0^1 f(x)\,dx = -\left[F(x)\right]_0^1 = -\left[F(1) - F(0)\right] = F(0) - \cancel{F(1)} =$ **1 τ.μ.**