ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2012
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ
ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι $\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Σε ένα πείραμα με ισοπίθανα αποτελέσματα να δώσετε τον κλασικό ορισμό της πιθανότητας ενός ενδεχομένου Α

Μονάδες 4

Α3. Πώς ορίζεται ο συντελεστής μεταβολής ή συντελεστής μεταβλητότητας μιας μεταβλητής X, αν $\bar{x}>0$ και πώς, αν $\bar{x}<0$;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Το κυκλικό διάγραμμα χρησιμοποιείται μόνο για τη γραφική παράσταση ποσοτικών δεδομένων (μονάδες 2).

β) Η παράγωγος της f στο x_0 εκφράζει το ρυθμό μεταβολής του $y=f(x)$ ως προς x, όταν $x=x_0$ (μονάδες 2).

γ) Αν A,B ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω με $A\subseteq B$, τότε ισχύει ότι $P(A)>P(B)$ (μονάδες 2).

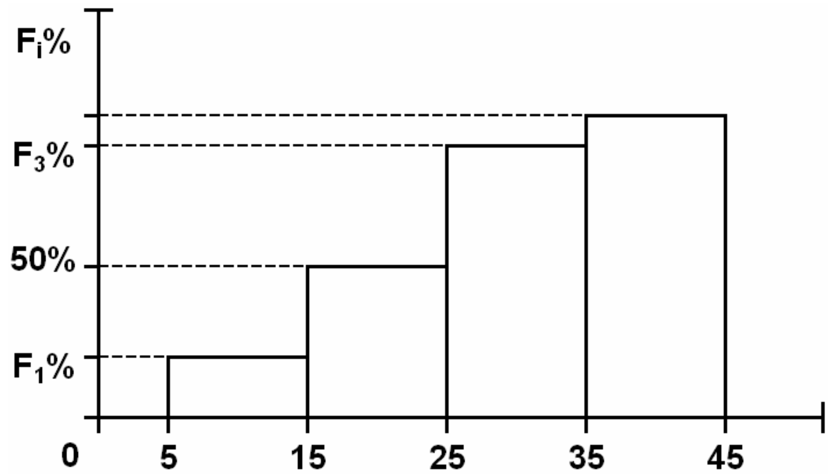
δ) Το εύρος, η διακύμανση και η τυπική απόκλιση των τιμών μιας μεταβλητής είναι μέτρα διασποράς (μονάδες 2).

ε) $\lim\limits_{x\to x_0} ημx = ημx_0$, $x_0\in\mathbb{R}$ (μονάδες 2).

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) που χρειάστηκαν οι μαθητές μιας τάξης για να λύσουν ένα μαθηματικό πρόβλημα ανήκουν στο διάστημα [5,45) και έχουν ομαδοποιηθεί σε τέσσερις κλάσεις ίσου πλάτους. Τα δεδομένα των χρόνων εμφανίζονται στο παρακάτω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό.



Β1. Με βάση το παραπάνω ιστόγραμμα αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό, να υπολογίσετε τη διάμεσο των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

Μονάδες 4

Β2. Στον επόμενο πίνακα συχνοτήτων της κατανομής των χρόνων, να αποδείξετε ότι α=8 (μονάδες 3) και να μεταφέρετε τον πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο στο τετράδιό σας (μονάδες 5).

Χρόνοι (λεπτά)	x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5, ˙)		α+4			
[˙ , ˙)		3α-6			
[˙ , ˙)		2α+8			
[˙ , 45)		α-2			
Σύνολο					

Μονάδες 8

Β3. Να βρεθεί η μέση τιμή $\bar{x}$ και η τυπική απόκλιση s των χρόνων που χρειάστηκαν οι μαθητές.

(Δίνεται ότι: $\sqrt{84} \approx 9,17$)

Μονάδες 8

Β4. Να βρεθεί το ποσοστό των μαθητών που χρειάστηκαν τουλάχιστον 37 λεπτά να λύσουν το μαθηματικό πρόβλημα.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Από τους μαθητές μιας τάξης ενός σχολείου επιλέγουμε τυχαία έναν μαθητή. Αν ν φυσικός αριθμός με $\nu \geq 3$, τότε η πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει

- Γαλλικά είναι $\frac{3\nu}{\nu^2+1}$
- Ισπανικά είναι $\frac{\nu+2}{\nu^2+1}$
- και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι $\frac{\nu+1}{\nu^2+1}$

- μία τουλάχιστον από τις παραπάνω γλώσσες είναι ίση με το όριο $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{2(\sqrt{x^2+3}-2)}{x^2+x}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το ενδεχόμενο ο μαθητής να μαθαίνει μία τουλάχιστον από τις παραπάνω δύο γλώσσες είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

Γ2. Να αποδείξετε ότι $\nu=3$

Μονάδες 6

Γ3. Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου ο μαθητής να μαθαίνει μόνο μία από τις δύο γλώσσες.

Μονάδες 6

Γ4. Αν ο αριθμός των μαθητών που μαθαίνουν και τις δύο παραπάνω γλώσσες είναι 32, να βρείτε τον αριθμό των μαθητών της τάξης.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{1+\ln^2 x}{x}$, $x>0$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα.

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $M(x,f(x))$, $x>0$ σημείο της γραφικής παράστασης της f. Η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $y'y$ τέμνει τον ημιάξονα Ox στο σημείο $K(x,0)$ και η παράλληλη ευθεία από το Μ προς τον άξονα $x'x$ τέμνει τον ημιάξονα Oy στο σημείο $\Lambda(0,f(x))$. Αν O είναι η αρχή των αξόνων, να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου παραλληλόγραμμου $OKM\Lambda$ γίνεται ελάχιστο, όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Μονάδες 7

Δ3. Έστω η ευθεία $\varepsilon: y=\lambda x+\beta$, $\beta \neq 10$, η οποία είναι παράλληλη προς την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $\Sigma(1, f(1))$. Θεωρούμε δέκα σημεία (x_i, y_i), i=1,2,...,10 της ευθείας ε, τέτοια ώστε οι τετμημένες τους x_i να έχουν μέση τιμή $\bar{x}=10$ και τυπική απόκλιση $s_x=2$. Να βρείτε για ποιες τιμές του β το δείγμα των τεταγμένων y_i των δέκα σημείων είναι ομοιογενές.

Μονάδες 8

Δ4. Αν Α και Β είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, τέτοια ώστε $A \neq \varnothing$ και $A \cap B \neq \varnothing$, τότε να αποδείξετε ότι

$$f(P(A))+f(P(A \cap B)) \geq 2f(P(A \cup B))$$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (*για τους εξεταζομένους*)

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό. Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε μολύβι μόνο για σχέδια, διαγράμματα και πίνακες.
5. Να μη χρησιμοποιήσετε χαρτί μιλιμετρέ.
6. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
7. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
8. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ 2012

ΘΕΜΑ Α

Α1. ΣΕΛ. 31
Α2. ΣΕΛ. 148
Α3. ΣΕΛ. 96
Α4. α. Λ, β. Σ, γ. Λ, δ. Σ, ε. Σ

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Από το πολύγωνο παρατηρούμε ότι το 50% των παρατηρήσεων βρίσκεται έως 25 λεπτά άρα δ = 25

Β2.

Η διάμεσος είναι 25 άρα $F_2\% = 50\%$ άρα $\frac{a+4+3a-6}{7a+4} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow a = 8$

	x_i	v_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$
[5,15)	10	12	20	12	20
[15,25)	20	18	30	30	50
[25,35)	30	24	40	54	90
[35,45)	40	6	10	60	100
Σύνολο		60	100		

Β3.
Η μέση τιμή είναι

$$\bar{x} = \frac{10\cdot 12 + 20\cdot 18 + 30\cdot 24 + 40\cdot 6}{60} = 24$$

Η διακύμανση είναι

$$s^2 = \frac{(10-24)^2\cdot 12 + (20-24)^2\cdot 18 + (30-24)^2\cdot 24 + (40-24)^2\cdot 6}{60} = \frac{2352+288+864+1536}{60} = 84$$

Άρα $s = \sqrt{s^2} \cong 9{,}17$

Β4.

Στην κλάση [35,45) βρίσκεται το $f_4\% = (100-90)\% = 10\%$ των μαθητών. Άρα αναλογικά έχουμε $\frac{2}{10} = 0{,}2$ του ποσοστού, και επομένως $0{,}2 \cdot 10\% = 2\%$. Συνεπώς τουλάχιστον 37 λεπτά χρειάστηκα το $(10 - 2)\% = 8\%$ των μαθητών.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Έχουμε τα ενδεχόμενα

Γ: « Ο μαθητής μαθαίνει γαλλικά» άρα $P(\Gamma) = \frac{3\nu}{\nu^2+1}$ και

Δ: « Ο μαθητής μαθαίνει Ισπανικά» άρα $P(\Delta) = \frac{\nu+2}{\nu^2+1}$ και $P(\Gamma \cap \Delta) = \frac{\nu+1}{\nu^2+1}$.

Για το όριο έχουμε,

$$\lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x} = \lim_{x\to -1} \frac{2\left(\sqrt{x^2+3}-2\right)}{x^2+x}\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{\sqrt{x^2+3}+2} = \lim_{x\to -1} \frac{2(x-1)(x+1)}{x(x+1)\sqrt{x^2+3}+2} = \frac{2(-2)}{-4} = 1$$

Επομένως είναι $P(\Gamma \cup \Delta) = 1$.

Γ2.

Από το προσθετικό νόμο έχουμε

$$P(\Gamma \cup \Delta) = P(\Gamma) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) \Leftrightarrow 1 = \frac{3\nu}{\nu^2+1} + \frac{\nu+2}{\nu^2+1} - \frac{\nu+1}{\nu^2+1} \Leftrightarrow \nu^2+1 = 3\nu+1 \Leftrightarrow \nu^2 - 3\nu = 0$$

$\Leftrightarrow \nu = 0$ ή $\nu = 3$ δεκτή

Η λύση $\nu = 0$ απορρίπτεται διότι από υπόθεση είναι $\nu \geq 3$.

Γ3.

Η ζητούμενη πιθανότητα είναι η $P((\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma))$.
Επειδή τα ενδεχόμενα $(\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma)$ είναι ασυμβίβαστα ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος, οπότε είναι

$$P((\Gamma - \Delta) \cup (\Delta - \Gamma)) = P(\Gamma - \Delta) + P(\Delta - \Gamma) = P(\Gamma) - P(\Gamma \cap \Delta) + P(\Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) =$$

$$P(\Gamma \cup \Delta) - P(\Gamma \cap \Delta) = 1 - \frac{4}{10} = \frac{6}{10}.$$

Γ4.
Είναι $N(\Gamma \cap \Delta)=32$.

Επομένως σύμφωνα με το κλασικό ορισμό της πιθανότητας έχουμε
$P(\Gamma \cap \Delta)=\dfrac{N(\Gamma \cap \Delta)}{N(\Omega)} \Leftrightarrow \dfrac{4}{10}=\dfrac{32}{N(\Omega)} \Leftrightarrow N(\Omega)=80$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

Η συνάρτηση f είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $f'(x)=\dfrac{-(\ln x-1)^2}{x^2}$.
Για να βρούμε την μονοτονία της συνάρτησης λύνουμε την εξίσωση,
$f'(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{-(\ln x-1)^2}{x^2}=0 \Leftrightarrow -(\ln x-1)^2=0 \Leftrightarrow \ln x-1=0 \Leftrightarrow x=e$.

Είναι $f'(x)=\dfrac{-(\ln x-1)^2}{x^2}<0$ για κάθε $x \in (0,e)\cup(e,+\infty)$ άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,+\infty)$.

Δ2.

Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισούται με $(\text{ΟΚΛΜ})=x\cdot f(x)=1+\ln^2 x$.
Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x)=1+\ln^2 x,\ \ x>0$. Η συνάρτηση g είναι συνεχής και παραγωγίσιμη στο $(0,+\infty)$ με $g'(x)=\dfrac{2\ln x}{x}$. Λύνουμε την εξίσωση $g'(x)=0 \Leftrightarrow 2\ln x=0 \Leftrightarrow x=1$. Ο πίνακας μεταβολής είναι,

x	0	1 $+\infty$
$g'(x)$	-	+
$g(x)$	$\downarrow$	$\uparrow$
		Ο.Ε

Είναι $g'(x)>0 \Leftrightarrow \ln x>0 \Leftrightarrow x>1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως φθίνουσα στο $(0,1]$ και $g'(x)<0 \Leftrightarrow \ln x<0 \Leftrightarrow x<1$ επομένως η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[1,+\infty)$ και παρουσιάζει ολικό ελάχιστο στη θέση $x=1$ το $f(1)=1$. Επομένως το ορθογώνιο ΟΚΛΜ γίνεται ελάχιστο όταν αυτό γίνει τετράγωνο.

Δ3.

Είναι $\lambda = f'(1) = 1$. Επομένως η ευθεία είναι $\varepsilon : y = -x + \beta$.

Οι παρατηρήσεις του δείγματος είναι $y_i = -x_i + \beta,\ \ i = 1,2,....,10$.

Η μέση τιμή του δείγματος των παρατηρήσεων είναι $\bar{y} = -\bar{x} + \beta = \beta - 10$ και η τυπική απόκλιση $s_y = |-1| \cdot s_x = 2$.

Για να είναι το δείγμα ομοιογενές πρέπει $CV_y \le 01 \Leftrightarrow \dfrac{2}{|\beta - 10|} \le \dfrac{1}{10} \Leftrightarrow |\beta - 10| \ge 20 \Leftrightarrow \beta - 10 \ge 20$ ή $\beta - 10 \le -20$ άρα $\beta \ge 30$ ή $\beta \le -10$.

Δ4.

Είναι $A \subseteq B$ άρα $P(A) \le P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A)) \ge f(P(A \cup B))$ (1).

Είναι επίσης $A \cap B \subseteq A \cup B$ άρα $P(A \cap B) \le P(A \cup B)$ και επειδή η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα έχουμε ότι $f(P(A \cap B)) \ge f(P(A \cup B))$ (2).

Από το άθροισμα των σχέσεων (1) και (2) προκύπτει ότι

$$f(P(A)) + f(P(A \cap B)) \ge 2f(P(A \cup B))$$