

**ΤΑΞΗ:** Γ' ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012**

**ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

**A1.** Να αποδείξετε ότι, αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σ' ένα σημείο  $x_0$ , τότε είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

**Μονάδες 5**

**A2.** Πότε μια συνάρτηση  $f$  με πεδίο ορισμού  $A$  παρουσιάζει ολικό μέγιστο στο  $x_0 \in A$ ;

**Μονάδες 4**

**A3.** Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f(x) = a^x$ ,  $a > 0$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει  $f'(x) = a^x \ln a$ .

**Μονάδες 6**

**A4.** Να βρείτε ποιοι από τους επόμενους ισχυρισμούς είναι αληθείς και ποιοι ψευδείς:

**i.** Μια συνάρτηση είναι 1-1, αν και μόνο αν δεν υπάρχουν σημεία της γραφικής της παράστασης με ίδια τεταγμένη.

**Μονάδες 2**

**ii.**  $i^{4n+3} = i$ , για κάθε  $n \in \mathbb{N}$ .

**Μονάδες 2**

**iii.** Αν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$ , τότε  $f(x) > 0$  κοντά στο  $x_0$ .

**Μονάδες 2**

**iv.** Αν δύο μεταβλητά μεγέθη  $x, y$  συνδέονται με τη σχέση  $y = f(x)$ , όταν  $f$  είναι μια συνάρτηση παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ο ρυθμός μεταβολής του  $y$  ως προς  $x$  στο σημείο  $x_0$  είναι η παράγωγος  $y = f'(x_0)$ .

**Μονάδες 2**

**v.** Αν μια συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε τα εσωτερικά σημεία  $x_0$  του  $\Delta$ , στα οποία  $f'(x_0) \neq 0$ , δεν είναι θέσεις τοπικών ακρότατων της  $f$ .

**Μονάδες 2**

**ΘΕΜΑ Β**

Δίνονται οι συναρτήσεις  $f(x) = e^{x-2}$  και  $g(x) = \ln x + 2$ .

**B1.** Να βρείτε τις συνθέσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  και να εξετάσετε αν είναι ίσες.

Μονάδες 6

**B2.** Να αποδείξετε ότι η  $f$  έχει αντίστροφη και να βρείτε την  $f^{-1}$ .

Μονάδες 6

**B3.** Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $e^{x-2} = \ln x + 2$  έχει μία, τουλάχιστον, ρίζα στο διάστημα  $(e^{-2}, 2)$ .

Μονάδες 6

**B4.** Να αποδείξετε ότι:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$$

Μονάδες 7

**ΘΕΜΑ Γ**

Η συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  είναι συνεχής και για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  ισχύει

$$(1 + 3\alpha^2) f(x) = e^{\int_x^1 2t f(t) dt},$$

όπου  $\alpha \in \mathbb{R} - \{0\}$ .

**Γ1.** Να αποδείξετε ότι:

i. Η  $f$  είναι παραγωγίσιμη με  $f'(x) = -2x f^2(x)$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 4

ii.  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

Μονάδες 4

**Γ2.** Να αποδείξετε ότι η τιμή του ολοκληρώματος  $\int_0^\alpha t f(t) dt$  είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

Μονάδες 4

**Γ3.** Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά την  $f$ .

Μονάδες 8

**Γ4.** Αν  $E$  είναι το εμβαδό του χωρίου που ορίζεται από τους άξονες, την γραφική παράσταση της  $f$  και την ευθεία  $x = \alpha$ , να αποδείξετε ότι:

$$\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Μονάδες 5

**ΘΕΜΑ Δ**

Η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με  $f(0) = 2$ ,

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x + 2} = -1 \quad \text{και} \quad f''(x) < 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Να αποδείξετε ότι:

**Δ1.**  $f'(-2) = 1$  και  $f(x) \leq x + 4$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Μονάδες 6**

**Δ2.** Η  $f$  παρουσιάζει μέγιστο σε σημείο  $x_0 \in (-2, 0)$ .

**Μονάδες 6**

**Δ3.** Η εξίσωση

$$f' \left( \int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0)$$

έχει μοναδική λύση στο  $\mathbb{R}$  την  $x = 5$ .

**Μονάδες 7**

**Δ4.** Ο μιγαδικός αριθμός  $z$  για τον οποίο ισχύει

$$f(|z + i|) \leq f(|z| + 1)$$

είναι φανταστικός.

**Μονάδες 6**

**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ:** ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ  
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

**Ημερομηνία: Μ. Τετάρτη 11 Απριλίου 2012**

**ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ**

**ΘΕΜΑ Α**

- A1. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 217 την απόδειξη του Θεωρήματος.
- A2. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 150 τον ορισμό του μεγίστου.
- A3. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 234 την απόδειξη του τύπου  $(a^x)' = a^x \ln a$ .
- A4.
  - i. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 152 τα σχόλια.
  - ii. Ψευδής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 90 τις δυνάμεις του  $i$  με  $v = 3$ .
  - iii. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 165 το Θεώρημα 1<sup>ο</sup>.
  - iv. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 241 τον ορισμό του ρυθμού μεταβολής.
  - v. Αληθής. Βλέπε Σχολικό Βιβλίο, σελίδα 261 το σχόλιο του Θεωρήματος του Fermat.

**ΘΕΜΑ Β**

**B1.** Τα πεδία ορισμού των  $f, g$  είναι αντίστοιχα τα  $A_f = \mathbb{R}$  και  $A_g = (0, +\infty)$

- Η  $f \circ g$  έχει πεδίο ορισμού το σύνολο  $\{x \in A_g \text{ και } g(x) \in A_f\} = \{x > 0 \text{ και } g(x) \in \mathbb{R}\} = (0, +\infty)$

Για τέτοιες τιμές του  $x$ , έχουμε:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = e^{g(x)-2} = e^{\ln x} = x$$

Ωστε  $(f \circ g)(x) = x$  με  $x \in (0, +\infty)$

- Η  $g \circ f$  ορίζεται στο σύνολο  $\{x \in A_f \text{ και } f(x) \in A_g\} = \{x \in \mathbb{R} \text{ και } e^{x-2} > 0\} = \mathbb{R}$

Για τέτοιες τιμές του  $x$ , έχουμε:

$$(g \circ f)(x) = \ln f(x) + 2 = \ln e^{x-2} + 2 = (x - 2) + 2 = x$$

Ωστε  $(g \circ f)(x) = x$  με  $x \in \mathbb{R}$ .

Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις  $f \circ g$  και  $g \circ f$  δεν έχουν το ίδιο πεδίο ορισμού, επομένως δεν είναι ίσες.

**B2.** Για κάθε  $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$  έχουμε

$x_1 \neq x_2 \Rightarrow x_1 - 2 \neq x_2 - 2 \Rightarrow e^{x_1-2} \neq e^{x_2-2} \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$   
Επομένως η  $f$  είναι 1-1 και έχει αντίστροφη. Έχουμε

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^{x-2}$$

$$\Leftrightarrow x - 2 = \ln y, \quad y > 0$$

$$\Leftrightarrow x = \ln y + 2, \quad y > 0$$

Άρα  $f^{-1}(x) = \ln x + 2, \quad x > 0$

**B3** Θεωρούμε την συνάρτηση  $h(x) = e^{x-2} - \ln x - 2, \quad x \in [e^{-2}, 2]$ .

- Η  $h$  είναι συνεχής. Πράγματι η συνάρτηση  $e^{x-2}$  είναι συνεχής, ως σύνθεση της πολυωνυμικής  $x - 2$  με την εκθετική  $e^x$ , οι οποίες είναι συνεχείς. Επομένως η  $h$  είναι συνεχής, γιατί προκύπτει από πράξεις των συνεχών συναρτήσεων  $e^{x-2}$ ,  $\ln x$  (λογαριθμική) και 2 (σταθερή).
- Είναι

$$h(e^{-2}) = e^{e^{-2}-2} - \ln e^{-2} - 2 = e^{e^{-2}-2} + 2 - 2 = e^{e^{-2}-2} > 0$$

και

$$h(2) = e^{2-2} - \ln 2 - 2 = -1 - \ln 2 < 0$$

Οπότε:

$$h(e^{-2}) \cdot h(2) = e^{e^{-2}-2} (-1 - \ln 2) < 0$$

Εφαρμόζεται, επομένως το Θεώρημα του Bolzano για την  $h$  στο διάστημα  $[e^{-2}, 2]$ , οπότε υπάρχει  $x_0 \in (e^{-2}, 2)$  με  $h(x_0) = 0$ . Τότε

$$h(x_0) = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} - \ln x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow e^{x_0-2} = \ln x_0 + 2$$

Αυτό σημαίνει, ότι η εξίσωση  $e^{x-2} = \ln x + 2$  έχει ως ρίζα τον αριθμό  $x_0 \in (e^{-2}, 2)$  και αποδεικνύει το ζητούμενο.

**B4.** Είναι  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x-2}}{x} = 0$ , γιατί

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{x/2}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x}{e^2} = \frac{1}{e^2} \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = \frac{1}{e^2} \cdot 0 = 0 \quad \text{και} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

Ακόμα,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x}$ . Επειδή  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln x + 2) = +\infty$  και  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$

έχουμε απροσδιόριστη μορφή  $\frac{\infty}{\infty}$ . Είναι  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ , οπότε από

το αντίστοιχο θεώρημα του De L' Hospital έχουμε:

**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**E\_3.ΜΛ3ΘΤ(α)**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x + 2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x + 2)'}{(x)'} = 0$$

Ωστε  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{(g \circ f)(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{(f \circ g)(x)} = 0$

**ΘΕΜΑ Γ**

**Γ1. i** Είναι  $1+3\alpha^2 \neq 0$ , οπότε:

$$f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \tag{1}$$

Η συνάρτηση  $2tf(t)$  είναι συνεχής, ως γινόμενο των συνεχών συναρτήσεων  $2t$  και  $f(t)$ , οπότε η συνάρτηση που ορίζεται από το ολοκλήρωμα  $\int_1^x 2tf(t)dt$  είναι παραγωγίσιμη, άρα και η  $-\int_1^x 2tf(t)dt$

είναι παραγωγίσιμη. Επομένως η συνάρτηση  $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$  είναι παραγωγίσιμη ως σύνθεση παραγωγίσιμων συναρτήσεων, της  $-\int_1^x 2f(t)dt$  με την εκθετική  $e^x$ . Το γινόμενό της επί τον αριθμό  $\frac{1}{1+3\alpha^2}$ ,

δηλαδή η  $f(x) = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt}$  είναι παραγωγίσιμη. Έχουμε

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+3\alpha^2} \left( e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \right)' = \frac{1}{1+3\alpha^2} e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} \left( -\int_1^x 2f(t)dt \right)' \\ &= f(x)(-2xf(x)) = -2xf^2(x) \end{aligned}$$

**ii.** Για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  είναι  $f(x) > 0$ , αφού  $1+3\alpha^2 > 0$  και  $e^{-\int_1^x 2tf(t)dt} > 0$ . Έτσι

$$f'(x) = -2xf^2(x) \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f^2(x)} = -2x \Leftrightarrow \left[ \frac{1}{f(x)} \right]' = (x^2)'$$

Επομένως υπάρχει  $c \in \mathbb{R}$ , ώστε

$$\frac{1}{f(x)} = x^2 + c \tag{2}$$

Η (1) για  $x = 1$  δίνει  $f(1) = \frac{1}{1+3\alpha^2}$ .

Η (2) δίνει  $\frac{1}{f(1)} = 1+c \Leftrightarrow 1+3\alpha^2 = 1+c \Leftrightarrow c = 3\alpha^2$

Άρα η (2) δίνει  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2}$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Γ2.** Έχουμε

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012

E\_3.ΜΛ3ΘΤ(α)

$$\int_0^\alpha t f(t) dt = \int_0^\alpha \frac{t}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^\alpha \frac{(t^2 + 3\alpha^2)'}{t^2 + 3\alpha^2} dt = \left[ \frac{1}{2} \ln |t^2 + 3\alpha^2| \right]_0^\alpha$$

$$= \frac{1}{2} \ln 4\alpha^2 - \frac{1}{2} \ln 3\alpha^2 = \frac{1}{2} \ln \frac{4}{3}$$

Η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη του  $\alpha$ .

Γ3. Η  $f$ , ως ρητή, είναι συνεχής και δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  με

$$f'(x) = \left( \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} \right)' = -\frac{(x^2 + 3\alpha^2)'}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} = -\frac{2x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2}$$

Το πρόσημο της  $f'$  με την μονοτονία και το ακρότατο της  $f$  φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

$x$	$-\infty$	$0$	$+\infty$
$f'$	+	0	-
$f$		$\frac{1}{3\alpha^2}$	

Η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα  $(-\infty, 0]$ , γνησίως φθίνουσα στο  $[0, +\infty)$  και έχει ολικό μέγιστο το  $f(0) = \frac{1}{3\alpha^2}$

Για την  $f''$  έχουμε:

$$f''(x) = -2 \left[ \frac{x}{(x^2 + 3\alpha^2)^2} \right]' = -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - x \cdot 2(x^2 + 3\alpha^2) \cdot 2x}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} =$$

$$= -2 \frac{(x^2 + 3\alpha^2)^2 - 4x^2(x^2 + 3\alpha^2)}{(x^2 + 3\alpha^2)^4} = -2 \frac{x^2 + 3\alpha^2 - 4x^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3} = 6 \frac{x^2 - \alpha^2}{(x^2 + 3\alpha^2)^3}$$

Το πρόσημο της  $f''$  με την κυρτότητα της  $f$  και τα σημεία καμπής της φαίνονται στον επόμενο πίνακα:

$x$	$-\infty$	$- \alpha $	$ \alpha $	$+\infty$
$f''$	+	0	-	+
$f$		$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	

Η  $f$  είναι κυρτή σε καθένα από τα διαστήματα  $(-\infty, -|\alpha|]$ ,  $[|\alpha|, +\infty)$  και κοίλη στο διάστημα  $[-|\alpha|, |\alpha|]$ . Έχει σημεία καμπής τα  $(-|\alpha|, 1/4\alpha^2)$  και  $(|\alpha|, 1/4\alpha^2)$

Η  $f$ , ως συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες. Στα  $+\infty$  και  $-\infty$  έχουμε:

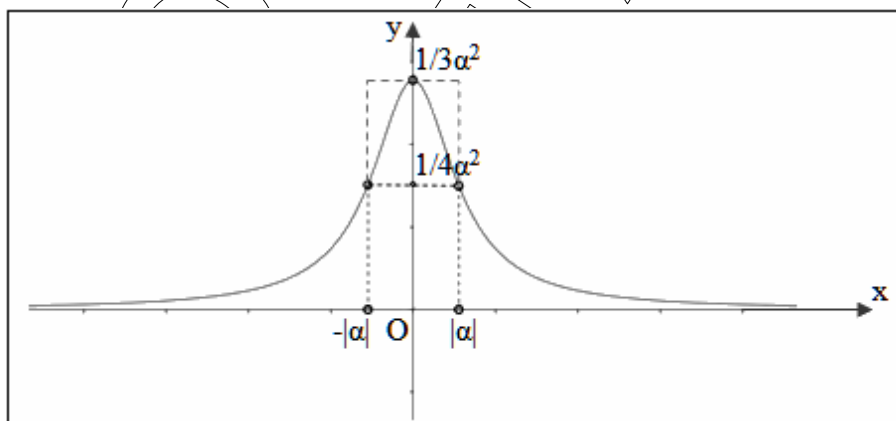
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Άρα έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο  $+\infty$  και στο  $-\infty$  τον άξονα των  $x$ . Σύμφωνα με τα παραπάνω συμπληρώνουμε τον επόμενο πίνακα μεταβολών:

$x$	$-\infty$	$- \alpha $	$0$	$ \alpha $	$+\infty$
$f'$		+	+	0	-
$f''$		+	0	-	-
$f$		$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	$\frac{1}{3\alpha^2}$ max	$\frac{1}{4\alpha^2}$ σ.κ	

Η γραφική παράσταση της  $f$  δίνεται στο επόμενο σχήμα:



**Παρατήρηση.** Η  $f$  είναι άρτια αφού για κάθε  $x \in \mathbb{R}$  το  $-x \in \mathbb{R}$  και

$$f(-x) = \frac{1}{(-x)^2 + 3\alpha^2} = \frac{1}{x^2 + 3\alpha^2} = f(x)$$

Επομένως μπορούμε να την μελετήσουμε στο διάστημα  $[0, +\infty)$  και να επεκτείνουμε τα συμπεράσματα στο  $\mathbb{R}$ .

- Γ4.** Το ζητούμενο εμβαδό (βλέπε τη γραφική παράσταση της  $f$ ) είναι μεγαλύτερο από το εμβαδό  $E_1 = |\alpha| \frac{1}{4\alpha^2} = \frac{1}{4|\alpha|}$  του ορθογωνίου που ορίζεται από τους



**ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2012**

**E\_3.ΜΛ3ΘΤ(α)**

άξονες και τις ευθείες  $x = \alpha$ ,  $y = \frac{1}{4\alpha^2}$ , και μικρότερο από το εμβαδό

$E_2 = |\alpha| \frac{1}{3\alpha^2} = \frac{1}{3|\alpha|}$  του ορθογωνίου που ορίζεται από τους άξονες και τις

ευθείες  $x = \alpha$ ,  $y = \frac{1}{3\alpha^2}$ . Επομένως  $\frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$

**Αλλιώς:** Με  $\alpha > 0$ , επειδή  $f(x) > 0$  είναι  $E = \int_0^\alpha |f(x)| dx = \int_0^\alpha f(x) dx$ . Η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, \alpha]$ , οπότε για  $x \in [0, \alpha]$  είναι

$$f(\alpha) \leq f(x) \leq f(0) \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha^2} \leq f(x) \leq \frac{1}{3\alpha^2} \Leftrightarrow f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \geq 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \geq 0$$

Επειδή οι αντίστοιχες ισότητες δεν ισχύουν σε όλο το  $[0, \alpha]$ , έχουμε

$$\int_0^\alpha \left[ f(x) - \frac{1}{4\alpha^2} \right] dx > 0 \text{ και } \int_0^\alpha \left[ \frac{1}{3\alpha^2} - f(x) \right] dx > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^\alpha f(x) dx - \left[ \frac{x}{4\alpha^2} \right]_0^\alpha > 0 \text{ και } \left[ \frac{x}{3\alpha^2} \right]_0^\alpha - \int_0^\alpha f(x) dx > 0$$

$$\Leftrightarrow E - \frac{1}{4\alpha} > 0 \text{ και } \frac{1}{3\alpha} - E > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4\alpha} < E < \frac{1}{3\alpha} \Leftrightarrow \frac{1}{4|\alpha|} < E < \frac{1}{3|\alpha|}$$

Με  $\alpha < 0$  θα εργαστούμε ομοίως.

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ1.** Θέτουμε

$$g(x) = \frac{f(x) - 2e^{x+2}}{x+2}, x \neq -2$$

Τότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} g(x) = -1 \tag{1}$$

και

$$f(x) = (x+2)g(x) + 2e^{x+2}, x \neq -2 \tag{2}$$

Είναι

$$\lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2) + 2e^{x+2}] = \lim_{x \rightarrow -2} [g(x)(x+2)] + \lim_{x \rightarrow -2} 2e^{x+2} = 0 + 2 = 2$$

οπότε

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = 2$$

Η  $f$ , ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ , είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$ , άρα και στο  $x_0 = -2$ , έτσι

$$\lim_{x \rightarrow -2} f(x) = f(-2) \Rightarrow f(-2) = 2 \tag{3}$$

Έχουμε, με  $x \neq -2$

$$\frac{f(x) - f(-2)}{x+2} \stackrel{(1),(3)}{=} \frac{(x+2)g(x) + 2e^{x+2} - 2}{x+2} = \frac{(x+2)g(x)}{x+2} + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$$

Το όριο  $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2}$  είναι απροσδιόριστη μορφή τύπου  $\frac{0}{0}$ . Παρατηρούμε ότι

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x+2)'} = \lim_{x \rightarrow -2} (e^{x+2}) = e^0 = 1$$

Επομένως, εφαρμόζεται ο αντίστοιχος κανόνας του De L' Hospital σύμφωνα με το οποίο βρίσκουμε

$$\lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{(e^{x+2} - 1)'}{(x+2)'} = 1$$

Τότε

$$f'(-2) = \lim_{x \rightarrow -2} \frac{f(x) - f(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow -2} \left[ g(x) + 2 \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} \right] = \lim_{x \rightarrow -2} g(x) + 2 \lim_{x \rightarrow -2} \frac{e^{x+2} - 1}{x+2} = 1$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η  $C_f$  είναι κοίλη, γιατί  $f''(x) < 0$  στο  $\mathbb{R}$ . Επομένως τα σημεία της  $C_f$  είναι κάτω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της στο σημείο της  $A(-2, f(-2))$ , εκτός του σημείου επαφής που είναι κοινό σημείο. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι:

$$y - f(-2) = f'(-2)(x+2) \Leftrightarrow y - 2 = x + 2 \Leftrightarrow y = x + 4$$

Άρα  $f(x) \leq x + 4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**Παρατήρηση.** Η σχέση αυτή αποδεικνύεται και με τη βοήθεια της συνάρτησης  $T(x) = f(x) - x - 4$ , η οποία έχει μέγιστο το  $T(-2) = 0$ .

- Δ2.** Είναι  $f(-2) = f(0) = 2$ . Ακόμα η  $f$  είναι συνεχής στο  $[-2, 0]$  και παραγωγίσιμη στο  $(-2, 0)$ , ως παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ . Εφαρμόζεται, επομένως, το θεώρημα του Rolle για την  $f$  στο διάστημα  $[-2, 0]$ , οπότε υπάρχει  $x_0 \in (-2, 0)$  τέτοιο, ώστε  $f'(x_0) = 0$ . Επειδή  $f''(x) < 0$  η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , οπότε το  $x_0$  είναι μοναδική της ρίζα και
- για κάθε  $x \in (-\infty, x_0)$  είναι  $x < x_0 \Rightarrow f'(x) > f'(x_0) \Rightarrow f'(x) > 0$
  - για κάθε  $x \in (x_0, +\infty)$  είναι  $x > x_0 \Rightarrow f'(x) < f'(x_0) \Rightarrow f'(x) < 0$
- Άρα η  $f$  ως συνεχής έχει μέγιστο (ολικό) το  $f(x_0)$  με  $x_0 \in (-2, 0)$ .

- Δ3.** Η  $f'$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , επομένως είναι 1-1, οπότε

$$f' \left( \int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt \right) = f'(0) \Leftrightarrow \int_0^{2(x-5)} f(t-x) dt = 0 \quad (4)$$

Αρκεί να δείξουμε, ότι η (4) έχει μοναδική ρίζα στο  $\mathbb{R}$  την  $x = 5$ .

Πράγματι, για  $x = 5$  η (4) επαληθεύεται, γιατί γίνεται  $\int_0^0 f(t-x)dt = 0$ .

Για να δείξουμε την μοναδικότητα της ρίζας θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^{2(x-5)} f(t-x)dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

Θέτουμε  $t-x = u$ , οπότε  $dt = du$ . Για  $t=0$  το  $u = -x$  και για  $t=2(x-5)$  το  $u = x-10$ , επομένως

$$h(x) = \int_{-x}^{x-10} f(u)du = \int_0^{x-10} f(u)du - \int_0^{-x} f(u)du$$

Επειδή η  $f$  είναι συνεχής, η συνάρτηση  $\varphi(x) = \int_0^x f(u)du$  είναι παραγωγίσιμη, επομένως και οι συνθέσεις των  $x-10$  και  $-x$  με την  $\varphi$  είναι παραγωγίσιμες με

$$\left(\int_0^{x-10} f(u)du\right)' = (x-10)'f(x-10) = f(x-10),$$

$$\left(\int_0^{-x} f(u)du\right)' = (-x)'f(-x) = -f(-x)$$

Επομένως η  $h$  είναι παραγωγίσιμη, ως άθροισμα παραγωγίσιμων συναρτήσεων, με

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x)$$

Επειδή, από το ερώτημα Δ1  $f(x) \leq x+4$  για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ , είναι

$$h'(x) = f(x-10) + f(-x) \leq (x-10) + 4 + (-x) + 4 = -2 < 0$$

Άρα η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα, επομένως και 1-1, που σημαίνει ότι η ρίζα της είναι μοναδική. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο.

- Δ4. Στο ερώτημα Δ1 δείξαμε ότι  $f'(x) < 0$  στο  $(x_0, +\infty)$  με  $x_0 \in (-2, 0)$ . Επομένως η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα  $[0, +\infty)$ . Είναι  $|z+i| \geq 0$  και  $|z|+1 \geq 1 > 0$ , αφού το μέτρο κάθε μιγαδικού είναι μη αρνητικός αριθμός. Τότε, με  $z = x+iy, x, y \in \mathbb{R}$  παίρνουμε.

$$f(|z+i|) \leq f(|z|+1) \Leftrightarrow |z+i| \geq |z|+1$$

$$\Leftrightarrow |x+(y+1)i| \geq |x+iy|+1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y+1)^2} \geq \sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+(y+1)^2}\right)^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}+1\right)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2+y^2+2y+1 \geq x^2+y^2+2\sqrt{x^2+y^2}+1$$

$$\Leftrightarrow y \geq \sqrt{x^2+y^2}$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } y^2 \geq \left(\sqrt{x^2+y^2}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow y \geq 0 \text{ και } x = 0, \text{ άρα } z = iy, y \in \mathbb{R}^+, \text{ φανταστικός.}$$