ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ 2013

ΤΑΞΗ: **Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ**
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: **ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ**
ΜΑΘΗΜΑ: **ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Στις ερωτήσεις από Α1-Α4 να γράψετε στο τετράδιο σας τον αριθμό της ερώτησης και το γράμμα που αντιστοιχεί στην σωστή απάντηση.

Α1. Όταν σε ένα γραμμικό ομογενές ελαστικό μέσο διαδίδεται ένα αρμονικό μηχανικό κύμα, τότε:

α. η συχνότητα του κύματος εξαρτάται από το μέσο διάδοσης.
β. το μήκος του κύματος είναι ανεξάρτητο από το μέσο διάδοσης.
γ. η ταχύτητα διάδοσης του κύματος καθορίζεται από το μέσο διάδοσης.
δ. η περίοδος του κύματος καθορίζεται από την πηγή και το μέσο διάδοσης.

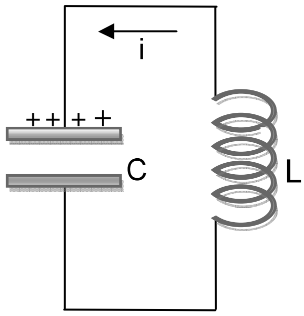
Μονάδες 5

Α2. Ομογενής δίσκος εκτελεί στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Αν διπλασιαστεί το μέτρο της στροφορμής του, τότε:

α. η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής τετραπλασιάζεται.
β. η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής διπλασιάζεται.
γ. η κινητική του ενέργεια λόγω περιστροφής δεν μεταβάλλεται.
δ. το μέτρο της γωνιακής του ταχύτητας τετραπλασιάζεται.

Μονάδες 5

Α3. Ένα ιδανικό κύκλωμα LC, που εκτελεί ηλεκτρική ταλάντωση, κάποια χρονική στιγμή παρουσιάζει την εικόνα του διπλανού σχήματος. Για το κύκλωμα μπορούμε να πούμε ότι εκείνη τη στιγμή:



α. η ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου μειώνεται.
β. η αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος είναι οπωσδήποτε αρνητική.
γ. η ενέργεια μαγνητικού πεδίου μειώνεται.
δ. η αλγεβρική τιμή της έντασης του ρεύματος είναι οπωσδήποτε θετική.

Μονάδες 5

Α4. Όταν ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση:

α. η ενέργεια της ταλάντωσης μεταβάλλεται αρμονικά με το χρόνο.
β. η κινητική του ενέργεια μεγιστοποιείται 4 φορές στη διάρκεια μιας περιόδου.
γ. η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης μηδενίζεται 1 φορά στη διάρκεια μιας περιόδου.
δ. η κινητική του ενέργεια μεγιστοποιείται 2 φορές στη διάρκεια μιας περιόδου.

Μονάδες 5

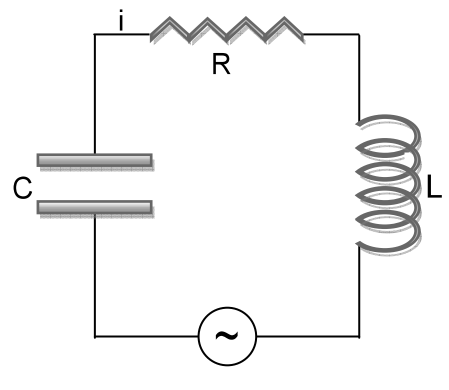
Α5. *Να γράψετε στο τετράδιό σας το γράμμα κάθε πρότασης και δίπλα σε κάθε γράμμα τη λέξη **Σωστό**, για τη σωστή πρόταση, και τη λέξη **Λάθος**, για τη λανθασμένη.*

α. Για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, η φάση της επιτάχυνσης του σώματος προηγείται κατά π rad από τη φάση της απομάκρυνσής του.
β. Όταν σε ένα αρχικά ακίνητο ελεύθερο στερεό σώμα ασκείται ζεύγος δυνάμεων, απουσία κάθε άλλης αλληλεπίδρασης, τότε το στερεό σώμα εκτελεί μόνο στροφική κίνηση.
γ. Για ένα σώμα που εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι σε κάθε στιγμή αντίθετος με το ρυθμό μεταβολής της δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης.
δ. Τα πρωτόνια, νετρόνια και ηλεκτρόνια έχουν spin μέτρου $2\hbar$.
ε. Σε κάθε κρούση μεταξύ δυο σωμάτων, η μεταβολή της ορμής του ενός σώματος είναι αντίθετη της μεταβολής της ορμής του άλλου.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Β

Β1. Στο κύκλωμα εξαναγκασμένων ηλεκτρικών ταλαντώσεων του παρακάτω σχήματος η πηγή εναλλασσόμενης τάσης δημιουργεί εναλλασσόμενη τάση που έχει σταθερό πλάτος και συχνότητα που μπορούμε να μεταβάλλουμε.



Το πηνίο έχει συντελεστή αυτεπαγωγής $L=10^{-3}H$ και ο πυκνωτής έχει χωρητικότητα $C=10^{-5}F$. Μεταβάλλοντας τη συχνότητα της πηγής από $f_1 = \frac{1000}{\pi}Hz$ έως $f_2 = \frac{8000}{\pi}Hz$ παρατηρούμε ότι το πλάτος της έντασης του ρεύματος που διαρρέει το κύκλωμα:

α. αυξάνεται συνεχώς
β. μειώνεται συνεχώς
γ. αρχικά αυξάνεται και μετά μειώνεται .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 6

Β2. Από τη σύνθεση δυο απλών αρμονικών ταλαντώσεων (Α.Α.Τ) που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με εξισώσεις:

$$x_1 = A_0 \cdot ημω_1 t \text{ και } x_2 = \sqrt{3}A_0 \cdot ημ\left(ω_1 t + \frac{π}{2}\right) \text{ (S.I.)}$$

προκύπτει μια νέα απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_1.

Από τη σύνθεση δυο Α.Α.Τ που γίνονται στην ίδια διεύθυνση και γύρω από την ίδια θέση ισορροπίας, με εξισώσεις:

$$x_3 = A_1 \cdot ημω_1 t \qquad \text{και} \qquad x_4 = A_1 \cdot ημω_2 t,$$

όπου $ω_1$ και $ω_2$ παραπλήσιες με σχέση που τις συνδέει:

$$ω_2 = ω_1 + π \text{ (S.I.)}$$

προκύπτει μια ιδιόμορφη περιοδική κίνηση με πλάτος A_2.

Β2.1 Το πλάτος A_2 μεταβάλλεται περιοδικά με το χρόνο μεταξύ των τιμών:

α. $0 \le A_2 \le 2A_0$ **β.** $-2A_0 \le A_2 \le 2A_0$ **γ.** $0 \le A_2 \le 4A_0$

Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 1

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 3

Β2.2 Το πλάτος A_2 μηδενίζεται κάθε:

α. 1s **β.** 2s **γ.** 4s

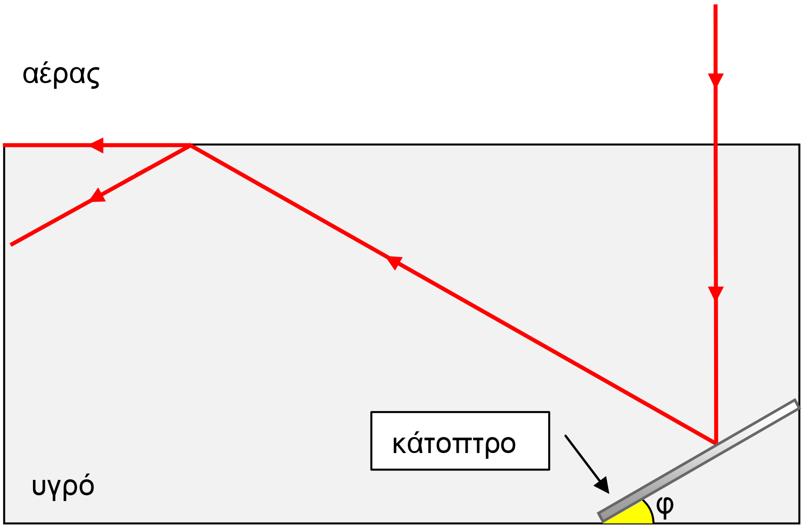
Επιλέξτε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 1

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Μονάδες 3

Β3. Μονοχρωματική δέσμη φωτός προσπίπτει κάθετα στη διαχωριστική επιφάνεια αέρα – υγρού, προερχόμενη από τον αέρα. Στη συνέχεια η δέσμη, διαδιδόμενη εντός του υγρού, προσπίπτει σε επίπεδο κάτοπτρο που βρίσκεται ακλόνητα τοποθετημένο εντός του υγρού και σχηματίζει γωνία $\varphi=30^o$ με τη διεύθυνση του πυθμένα του δοχείου, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η δέσμη μετά την ανάκλασή της στο κάτοπτρο ακολουθεί την πορεία που παρουσιάζεται στο σχήμα, εξερχόμενη από το υγρό σε διεύθυνση παράλληλη στην επιφάνειά του.



Ο δείκτης διάθλασης του υγρού έχει την τιμή:

α. $\sqrt{3}$ **β.** $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **γ.** $\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση.

Μονάδες 2

Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

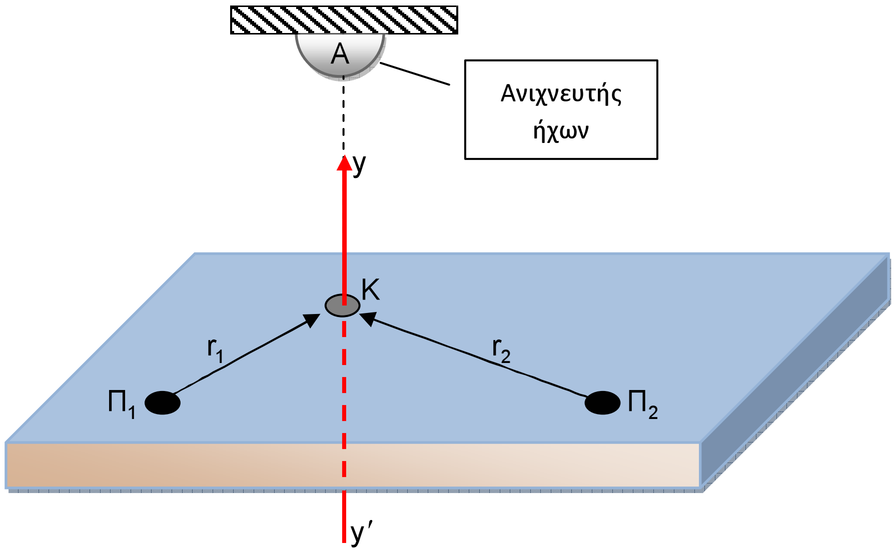
Μονάδες 7

Δίνονται: $\sigma\upsilon\nu 30^o = \eta\mu 60^o = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$, $\eta\mu 30^o = \sigma\upsilon\nu 60^o = \dfrac{1}{2}$

ΘΕΜΑ Γ

Στην επιφάνεια ενός υγρού που ηρεμεί, βρίσκονται δύο σύγχρονες σημειακές πηγές Π_1 και Π_2, που δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα ίσου πλάτους. Τα κύματα διαδίδονται στο υγρό με ταχύτητα μέτρου 2m/s. Οι πηγές αρχίζουν να ταλαντώνονται τη χρονική στιγμή $t_0=0$ ξεκινώντας από τη θέση ισορροπίας τους, κινούμενες κατακόρυφα προς τα πάνω, κατεύθυνση που θεωρούμε ως θετική. Σε ένα σημείο Κ της επιφάνειας του υγρού βρίσκεται μικρή σημαδούρα, η οποία φέρει στην κορυφή της ενσωματωμένη πηγή ηχητικών κυμάτων συχνότητας $f_s=672$Hz. Οι αποστάσεις του σημείου Κ από τις δυο πηγές Π_1, Π_2 είναι αντίστοιχα r_1, r_2 με $r_1<r_2$. Σε θέση Α, που βρίσκεται σε διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του υγρού (ΚΑ), ακριβώς επάνω από

τη σημαδούρα, είναι στερεωμένος στην οροφή ένας ανιχνευτής ήχων. Η σημαδούρα είναι αρχικά ακίνητη και αρχίζει να ταλαντώνεται κατά τη διεύθυνση του κατακόρυφου άξονα y΄y, τη χρονική στιγμή t_1=0,4s με πλάτος $\frac{0,2}{\pi}$m, ενώ από την χρονική στιγμή t_2=0,6s και έπειτα το πλάτος ταλάντωσής της διπλασιάζεται. Με δεδομένο ότι το σημείο Κ βρίσκεται στην υπερβολή ενίσχυσης που είναι πλησιέστερη στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος $\Pi_1\Pi_2$:



Γ1. Να υπολογίσετε τις αποστάσεις r_1, r_2 του σημείου Κ από κάθε πηγή.

Μονάδες 4

Γ2. Να γράψετε την εξίσωση που περιγράφει την απομάκρυνση της σημαδούρας από τη θέση ισορροπίας της συναρτήσει του χρόνου για $t \geq 0$.

Μονάδες 9

Γ3. Να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή κατά την οποία η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης της σημαδούρας λαμβάνει τη μέγιστη δυνατή τιμή της για πρώτη φορά.

Μονάδες 5

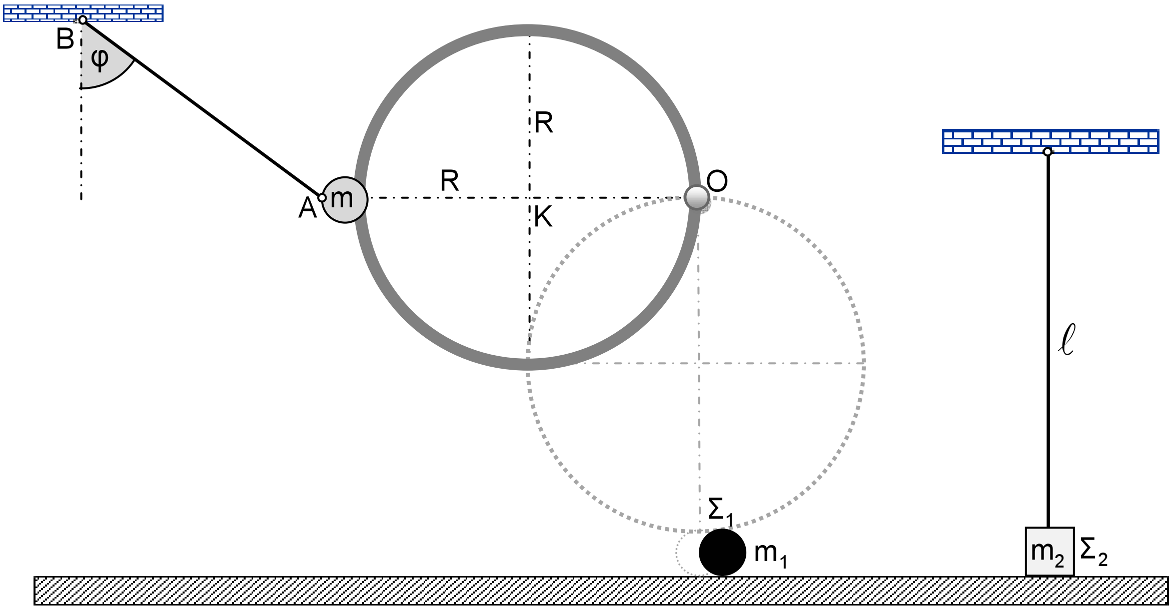
Γ4. Να βρείτε τη μέγιστη τιμή της συχνότητας του ήχου που καταγράφεται από τον ανιχνευτή Α κατά την ταλάντωση της σημαδούρας.

Μονάδες 7

Δίνεται: το μέτρο της ταχύτητας διάδοσης του ήχου στον αέρα $\upsilon_{\eta\chi}$=340m/s.

ΘΕΜΑ Δ

Ο ομογενής δακτύλιος του παρακάτω σχήματος έχει μάζα M=3Kg, ακτίνα R=0,4m και φέρει στερεωμένο ακλόνητα στο σημείο A σφαιρίδιο μάζας m=1Kg. Ο δακτύλιος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα που διέρχεται από το σημείο O και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Το σύστημα δακτυλίου - σφαιριδίου αρχικά ισορροπεί δεμένο με μη εκτατό νήμα από το σημείο A. Το άλλο άκρο του νήματος δένεται στο σημείο B, σχηματίζοντας με την κατακόρυφο γωνία $\varphi=60^o$.



Δ1. Αν αρχικά το σύστημα ισορροπεί να υπολογίσετε το μέτρο της τάσης του νήματος.

Μονάδες 4

Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα οπότε το σύστημα δακτυλίου – σφαιριδίου αρχίζει να περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που διέρχεται από το O. Τη στιγμή που η διάμετρος OA του δακτυλίου γίνει κατακόρυφη το σύστημα συγκρούεται με το σώμα Σ_1 μάζας m_1=1Kg, που είναι αρχικά ακίνητο πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Μετά την κρούση του με το σύστημα, το σώμα Σ_1 κινείται πάνω στο οριζόντιο δάπεδο. Κάποια στιγμή συναντά το αρχικά ακίνητο σώμα Σ_2, μάζας m_2=2Kg, με το οποίο συγκρούεται κεντρικά και ελαστικά. Το Σ_2 είναι δεμένο στο ένα άκρο τεντωμένου κατακόρυφου αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους ℓ=1m, το άλλο άκρο του οποίου δένεται ακλόνητα στην οροφή. Αμέσως μετά την κρούση του με το σώμα $\Sigma_{2,}$ το σώμα Σ_1, κινείται αντίθετα από την αρχική του φορά με ταχύτητα μέτρου 1m/s.

Να υπολογίσετε:

Δ2. τη ροπή αδράνειας του συστήματος δακτυλίου - σφαιριδίου ως προς τον άξονα περιστροφής του, αφού αρχικά αποδείξετε ότι η ροπή αδράνειας του δακτυλίου γύρω από άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I_{cm}=M \cdot R^2$.

Μονάδες 4

Δ3. το μέτρο της στροφορμής του δακτυλίου, ως προς τον άξονα περιστροφής του, τη στιγμή που η διάμετρός του ΟΑ γίνεται κατακόρυφη.

Μονάδες 5

Δ4. το ποσό της κινητικής ενέργειας του συστήματος δακτυλίου - σφαιριδίου που μετατρέπεται σε θερμική κατά την κρούση του με το σώμα Σ_1.

Μονάδες 6

Δ5. το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής του σώματος Σ_2 στη θέση της μέγιστης εκτροπής του νήματος από την κατακόρυφο.

Μονάδες 6

Δίνονται: $g = 10\ m/s^2$, $ημ60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $συν60° = \frac{1}{2}$.

Σε όλα τα ερωτήματα να θεωρήσετε τις διαστάσεις του σφαιριδίου που είναι στερεωμένο στον δακτύλιο, καθώς και τις διαστάσεις των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 αμελητέες.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΦΥΣΙΚΗ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 21 Απριλίου 2013
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1 – γ

Α2 – α (ισχύει: $K=\frac{1}{2}I\omega^2=\frac{L^2}{2\cdot I}$)

Α3 – γ (από τη φορά του ρεύματος και την πολικότητα των οπλισμών προκύπτει ότι ο πυκνωτής φορτίζεται)

Α4 – δ (η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται στη θέση ισορροπίας, από την οποία ο ταλαντωτής διέρχεται 2 φορές στη διάρκεια κάθε ταλάντωσης)

Α5 – α=Σ

ισχύουν: $x=A\eta\mu\omega t$ και $\alpha=-\alpha_{max}\eta\mu\omega t=\alpha_{max}\eta\mu(\omega t+\pi)$

β=Σ

για το ζεύγος ισχύει ΣF=0 και Στ≠0

γ=Σ

Ε=K+U=σταθ. Άρα: $\frac{dE}{dt}=\frac{dK}{dt}+\frac{dU}{dt}\xrightarrow{dE=0}\frac{dK}{dt}=-\frac{dU}{dt}$

δ=Λ

Τα στοιχειώδη σωματίδια - ηλεκτρόνια, πρωτόνια και νετρόνια έχουν σπιν μέτρου $\frac{1}{2}\hbar$.

ε=Σ

Σε κάθε κρούση ισχύει η Α.Δ.Ο οπότε:

$\vec{p}_1+\vec{p}_2=\vec{p}'_1+\vec{p}'_2 \Leftrightarrow \quad \vec{p}_1-\vec{p}'_1==\vec{p}'_2-\vec{p}_2 \Leftrightarrow \; -(\vec{p}'_1-\vec{p}_1)==\vec{p}'_2-\vec{p}_2 \Leftrightarrow$

$\Delta\vec{p}_1=-\Delta\vec{p}_2$

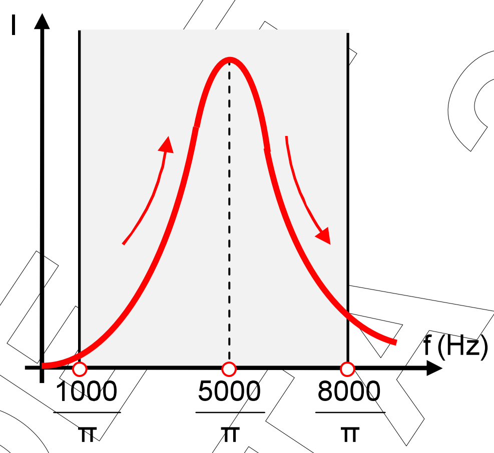
ΘΕΜΑ Β

Β1. Σωστό το γ.

Η ιδιοσυχνότητα του κυκλώματος είναι :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-3}\cdot 10^{-5}}} = \frac{1}{2\pi\sqrt{10^{-8}}} = \frac{1}{2\pi\cdot 10^{-4}} = \frac{10^4}{2\pi} = \frac{5000}{\pi}\text{Hz}$$

Με δεδομένο ότι η συχνότητα της πηγής (που λειτουργεί ως διεγέρτης στο κύκλωμα) μεταβάλλεται από $f_1 = \frac{1000}{\pi}\text{Hz}$ σε $f_2 = \frac{8000}{\pi}\text{Hz}$, και η καμπύλη συντονισμού έχει την παρακάτω μορφή:



συμπεραίνουμε πως το πλάτος αρχικά αυξάνεται και μετά μειώνεται.

Β2.1 Σωστό το γ.

Από τη σύνθεση των $x_1 = A_0\cdot ημω_1 t$ και $x_2 = \sqrt{3}A_0\cdot ημ\left(ω_1 t + \frac{\pi}{2}\right)$ προκύπτει μια νέα απλή αρμονική ταλάντωση με πλάτος A_1, που δίνεται από τη σχέση:

$$A_1 = \sqrt{A_0^2 + 3A_0^2 + 2\sqrt{3}A_0^2\cdot συν\frac{\pi}{2}} = \sqrt{4A_0^2} = 2A_0$$

Από τη σύνθεση των Α.Α.Τ με εξισώσεις $x_3 = A_1\cdot ημω_1 t$ και $x_4 = A_1\cdot ημω_2 t$, όπου $ω_1$ και $ω_2$ παραπλήσιες, προκύπτει διακρότημα με πλάτος A_2 που μεταβάλλεται περιοδικά μεταξύ των τιμών:

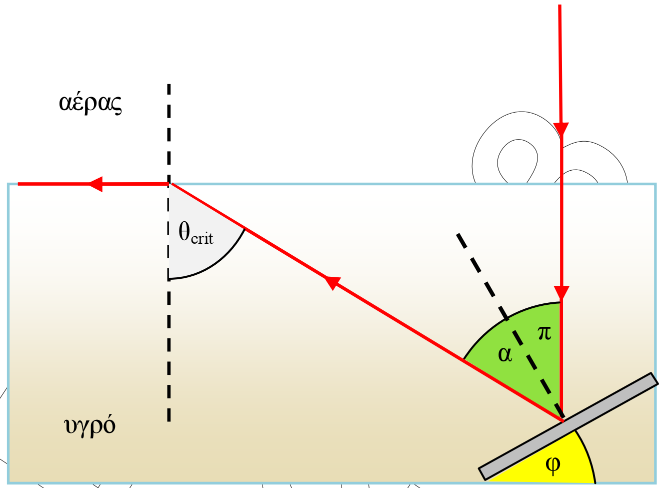
$0 \le A_2 \le 2A_1$ ή $0 \le A_2 \le 4A_0$

Β2.2 Σωστό το β.

Ο χρόνος μεταξύ δυο διαδοχικών μηδενισμών του πλάτους A_2 (περίοδος διακροτήματος) δίνεται από τη σχέση:

$$T_δ = \frac{1}{|f_1 - f_2|} = \frac{1}{\frac{|ω_1-ω_2|}{2\pi}} = \frac{2\pi}{|ω_1 - ω_2|} = \frac{2\pi}{\pi} \quad ή \quad T_δ = 2s$$

Β3. **Σωστό το γ.**



Φέρνουμε την κάθετο στο σημείο επαφής της προσπίπτουσας ακτίνας πάνω στο κάτοπτρο. Η γωνία πρόσπτωσης $\hat{\pi}$ είναι ίση με την γωνία $\hat{\varphi}$ που σχηματίζει το κάτοπτρο με τον πυθμένα (ως οξείες γωνίες που έχουν τις πλευρές τους κάθετες), άρα $\hat{\pi} = 30°$.

Για την ανάκλαση που συμβαίνει στο κάτοπτρο ισχύει ότι η γωνία πρόσπτωσης $\hat{\pi}$ και η γωνία ανάκλασης $\hat{\alpha}$ είναι ίσες, οπότε $\hat{\pi} = \hat{\alpha} = 30°$. Η γωνία $\hat{\theta}_{crit}$ με τη σειρά της είναι ίση με το άθροισμα της $\hat{\pi}$ και $\hat{\alpha}$ (ως εντός εναλλάξ), επομένως $\hat{\theta}_{crit} = \hat{\pi} + \hat{\alpha} = 60°$.

Από τον νόμο του Snell έχουμε:

$$n_\upsilon \eta\mu\theta_{crit} = n_\alpha \cdot \eta\mu 90° \Leftrightarrow \quad n_\upsilon = \frac{1}{\eta\mu\theta_{crit}} \Leftrightarrow \quad n_\upsilon = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \Leftrightarrow \quad n_\upsilon = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

<u>ΘΕΜΑ Γ</u>

Γ1. Η σημαδούρα αρχίζει να ταλαντώνεται όταν φτάσει σε αυτή το κύμα από την εγγύτερη πηγή, δηλαδή την Π_1. Με βάση τα δεδομένα της άσκησης αυτό συμβαίνει τη στιγμή t_1=0,4s. Άρα η απόσταση από την Π_1 είναι:

$$\upsilon = \frac{r_1}{t_1} \Leftrightarrow \qquad r_1 = \upsilon \cdot t_1 \Leftrightarrow \qquad r_1 = 2 \cdot 0{,}4 \Leftrightarrow \quad \boxed{r_1 = 0{,}8\ \text{m}}$$

Όταν στη σημαδούρα φτάσει το κύμα από τη δεύτερη πηγή, αρχίζει το φαινόμενο της συμβολής με αποτέλεσμα το πλάτος της ταλάντωσής της να μεταβάλλεται και πιο συγκεκριμένα να διπλασιάζεται. Αυτό σημαίνει ότι το σημείο Κ, είναι σημείο ενίσχυσης. Από την εκφώνηση προκύπτει ότι το κύμα από τη δεύτερη πηγή φτάνει στο Κ την t_2=0,6s. Άρα η απόσταση από την Π_2 είναι:

$$\upsilon = \frac{r_2}{t_2} \Leftrightarrow \qquad r_2 = \upsilon \cdot t_2 \Leftrightarrow \qquad r_2 = 2 \cdot 0{,}6 \Leftrightarrow \quad \boxed{r_2 = 1{,}2\ \text{m}}$$

Γ2. Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών θα είναι της μορφής: $y = A \cdot ημ(ωt)$

Επειδή το σημείο Κ βρίσκεται στην 1η υπερβολή ενίσχυσης μετά τη μεσοκάθετο, οι αποστάσεις του r_1,r_2 από τις δυο πηγές, θα επαληθεύουν τη συνθήκη ενίσχυσης $|r_1 - r_2| = N \cdot λ$, για N=1, οπότε:

$$r_2 - r_1 = 1 \cdot λ \Leftrightarrow \quad \underline{λ = 0{,}4 \text{ m}}$$

Με βάση τη θεμελιώδη εξίσωση της κυματικής έχουμε:

$$υ = λ \cdot f \Leftrightarrow \quad f = \frac{υ}{λ} \Leftrightarrow \quad f = \frac{2}{0{,}4} \Leftrightarrow \quad f = 5 \text{ Hz} \quad ή \quad \underline{T = 0{,}2\text{s}}$$

Για τη σημαδούρα θα ισχύουν:

- Μέχρι την άφιξη του κύματος από την $Π_1$, η σημαδούρα δεν ταλαντώνεται και συνεπώς y=0.
- Από τη στιγμή t_1=0,4s, που φτάνει το κύμα από την $Π_1$ και μέχρι να φτάσει το κύμα από την $Π_2$ την t_2=0,6s, η σημαδούρα ταλαντώνεται με την επίδραση του ενός μόνο κύματος, οπότε η εξίσωση ταλάντωσής του είναι:

$$y_K = A \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1}{λ}\right) \Leftrightarrow y_K = \frac{0{,}2}{π} \cdot ημ2π\left(5t - \frac{0{,}8}{0{,}4}\right) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}2}{π} \cdot ημ2π(5t - 2) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}2}{π} \cdot ημ(10πt - 4π) \quad \text{(S.I)}$$

- Από την t_2=0,6s, η σημαδούρα ταλαντώνεται υπό την επίδραση και των δυο κυμάτων οπότε ισχύει:

$$y_K = 2A \cdot συν2π\frac{|r_1 - r_2|}{2λ} \cdot ημ2π\left(\frac{t}{T} - \frac{r_1 + r_2}{2λ}\right) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}4}{π} \cdot συν2π\frac{0{,}4}{0{,}8} \cdot ημ2π\left(5t - \frac{2}{0{,}8}\right) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}4}{π} \cdot συνπ \cdot ημ2π(5t - 2{,}5) \Leftrightarrow$$

$$y_K = -\frac{0{,}4}{π} \cdot ημ(10πt - 5π) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}4}{π} \cdot ημ(10πt - 5π + π) \Leftrightarrow$$

$$y_K = \frac{0{,}4}{π} \cdot ημ(10πt - 4π) \quad \text{(S.I)}$$

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, η απομάκρυνση της σημαδούρας από τη θέση ισορροπίας περιγράφεται από τις εξισώσεις:

$$y_K = \begin{cases} 0 & 0 \le t < 0{,}4s \\ \dfrac{0{,}2}{\pi}\cdot ημ(10\pi t - 4\pi)\ (S.I) & 0{,}4s \le t < 0{,}6s \\ \dfrac{0{,}4}{\pi}\cdot ημ(10\pi t - 4\pi)\ (S.I) & t \ge 0{,}6s \end{cases}$$

Γ3. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης της σημαδούρας δίνεται από τη σχέση:

$$U = \frac{1}{2}DA_K^2$$

- Συνεπώς η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μέγιστη τιμή της για πρώτη φορά όταν το πλάτος ταλάντωσης της σημαδούρας γίνει μέγιστο για πρώτη φορά.
- Επειδή στη σημαδούρα έχουμε ενισχυτική συμβολή το πλάτος της μεγιστοποιείται μετά την έναρξη της συμβολής, οπότε και λαμβάνει την τιμή 2Α.
- Η έναρξη της συμβολής γίνεται την t_2=0,6s, στιγμή κατά την οποία η σημαδούρα βρίσκεται στη θέση ισορροπίας αφού σε σημεία ενίσχυσης η συνάντηση των κυμάτων γίνεται μετά τη συμπλήρωση ακέραιου αριθμού ταλαντώσεων μετά από την άφιξη του 1ου κύματος.

Άρα η σημαδούρα θα βρεθεί για πρώτη φορά, μετά την έναρξη της συμβολής στη μέγιστη απομάκρυνσή της, τη στιγμή:

$$t = t_2 + \frac{T}{4} \Leftrightarrow \quad t = 0{,}6 + \frac{0{,}2}{4} \Leftrightarrow \quad \boxed{t = 0{,}65\ s}$$

Γ4. Κατά την ταλάντωσή της η σημαδούρα λειτουργεί ως πηγή ήχου που άλλοτε πλησιάζει και άλλοτε απομακρύνεται από τον ανιχνευτή Α. Σύμφωνα με το φαινόμενο Doppler, λόγω της σχετικής κίνησης πηγής - ανιχνευτή , ο τελευταίος θα καταγράφει διαφορετική συχνότητα από την εκπεμπόμενη.

- Όταν η σημαδούρα κινείται **πλησιάζοντας** τον ανιχνευτή, η συχνότητα που θα καταγράφει αυτός θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_A = \frac{υ}{υ - |υ_K|} f_s$$

- Όταν η σημαδούρα κινείται **απομακρυνόμενη** από τον ανιχνευτή, η συχνότητα που θα καταγράφει αυτός θα δίνεται από τη σχέση:

$$f_A = \frac{υ}{υ + |υ_K|} f_s$$

Από τις προηγούμενες σχέσεις συμπεραίνουμε ότι η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής είναι μεγαλύτερη στην περίπτωση που η σημαδούρα πλησιάζει προς αυτόν.

Η καταγραφόμενη από τον ανιχνευτή συχνότητα παίρνει τη μέγιστη τιμή της όταν η ταχύτητα της σημαδούρας είναι μέγιστη και η κατεύθυνσή της είναι προς τον ανιχνευτή, όταν δηλαδή διέρχεται από τη θέση ισορροπίας (y=0) κινούμενη προς τα πάνω. Συνεπώς:

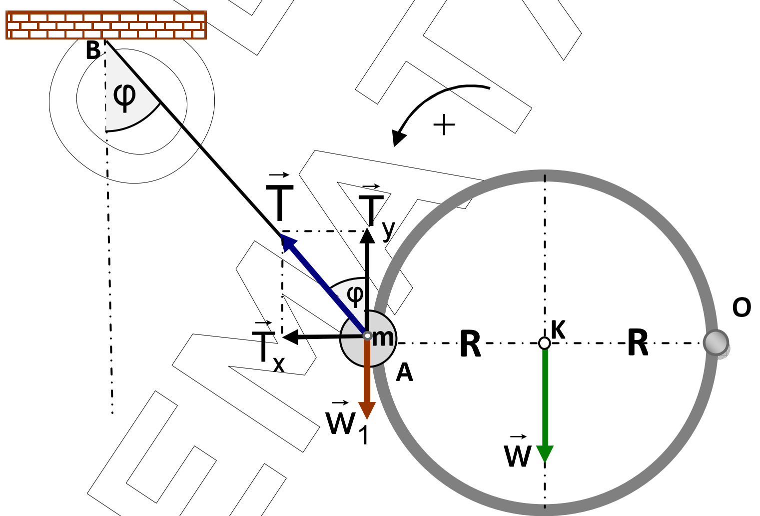
$$f_{A(max)} = \frac{\upsilon}{\upsilon - \upsilon_{K(max)}} f_s \qquad \text{με } \upsilon_{K(max)} = \omega \cdot |A_{K(max)}| = \omega \cdot 2A = 10\pi \cdot 2 \cdot \frac{0{,}2}{\pi} = 4\frac{m}{s}$$

Οπότε:

$$f_{A(max)} = \frac{340}{340-4} 672 = \frac{340}{336} 672 \Leftrightarrow \boxed{f_{A(max)} = 680 Hz}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δακτύλιο και το σφαιρίδιο και αναλύουμε την τάση του νήματος στις συνιστώσες $\vec{T}_x$ και $\vec{T}_y$. Για να ισορροπεί το σύστημα πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη $\Sigma\vec{\tau} = 0$ ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε το σημείο Ο έτσι ώστε η άγνωστη δύναμη της άρθρωσης να έχει ροπή ίση με μηδέν.



$$\Sigma\tau_{(O)} = 0 \Leftrightarrow \tau_w + \tau_{w_1} - \tau_{T_y} = 0 \Leftrightarrow$$

$$w \cdot R + w_1 \cdot 2R - T_y \cdot 2R = 0 \Leftrightarrow M \cdot g \cdot R + m \cdot g \cdot 2R - T \cdot \sigma\upsilon\nu 60^o \cdot 2R = 0 \Leftrightarrow$$

$$M \cdot g + 2m \cdot g - T \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 0 \Leftrightarrow T = (M+2m) \cdot g = (3 + 2 \cdot 1) \cdot 10 \Leftrightarrow \boxed{T = 50\ N}$$

Δ2. Για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, τον χωρίζουμε σε Ν υλικά σημεία, καθένα από τα οποία απέχει απόσταση R από το κέντρο του Ο και αθροίζουμε τις αντίστοιχες ροπές αδράνειας.

$$I_{\delta\alpha\kappa\tau(cm)} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \cdots + m_N r_N^2 = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \cdots + m_N R^2 = (m_1 + m_2 + \cdots + m_N)R^2$$

Επομένως: $\boxed{I_{\delta\alpha\kappa\tau(cm)} = M \cdot R^2}$

Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το Ο, θα δίνεται με βάση το θεώρημα Steiner από τη σχέση:

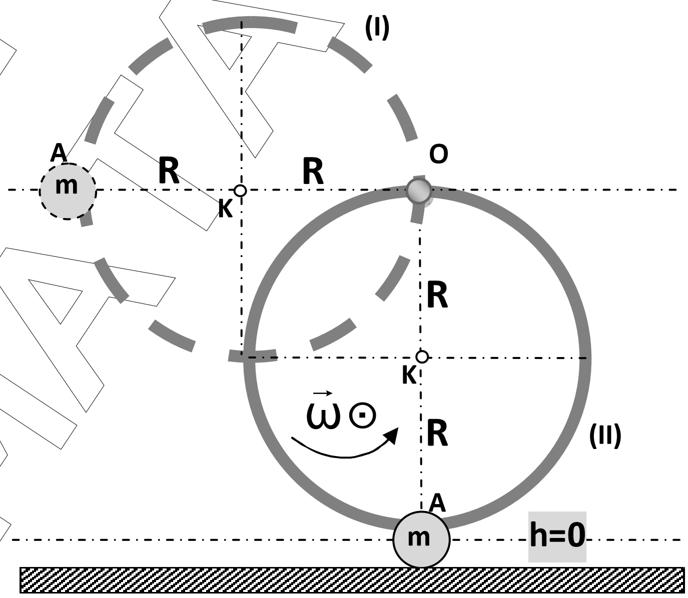
$$I_{\delta\alpha\kappa\tau(O)} = I_{\delta\alpha\kappa\tau(cm)} + MR^2 = MR^2 + MR^2 = 2MR^2$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα που περνά από το σημείο Ο, υπολογίζεται προσθέτοντας και τη ροπή αδράνειας του σφαιριδίου (υλικό σημείο).

$$I_{o\lambda(O)} = I_{\delta\alpha\kappa\tau(O)} + I_{\sigma\varphi\alpha\iota\rho(O)} = 2MR^2 + m(2R)^2 = 2MR^2 + 4mR^2 = 2(M + 2m)R^2$$

$$I_{o\lambda(O)} = 2(3 + 2 \cdot 1)0{,}4^2 = 10 \cdot 0{,}16 \Leftrightarrow \boxed{I_{o\lambda(O)} = 1{,}6\,Kg \cdot m^2}$$

Δ3. Το σύστημα δακτύλιος - σφαιρίδιο θα περιστραφεί γύρω από τον άξονα που περνά από το σημείο Ο. Επειδή κατά την κίνηση του συστήματος οι μοναδικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη σφαιριδίου – δακτυλίου, που είναι συντηρητικές, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε) για να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του συστήματος τη στιγμή που η διάμετρος ΟΑ γίνει κατακόρυφη. Λαμβάνοντας σαν επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας $U_{\beta\alpha\rho}=0$ αυτό που περνά από το σημείο Α έχουμε:



Α.Δ.Μ.Ε.: $E_{\mu\eta\chi(I)} = E_{\mu\eta\chi(II)}$

$$K_{o\lambda(I)} + U_{\delta\alpha\kappa\tau(I)} + U_{\sigma\varphi(I)} = K_{o\lambda(II)} + U_{\delta\alpha\kappa\tau(II)} + U_{\sigma\varphi(II)}$$

$$0 + Mg2R + mg2R = \frac{1}{2} \cdot I_{o\lambda(O)} \cdot \omega^2 + MgR \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot I_{o\lambda(O)} \cdot \omega^2 = MgR + mg2R$$

$$\frac{1}{2}\cdot I_{ολ(O)}\cdot\omega^2=(M+2m)gR \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cdot 1{,}6\cdot\omega^2=(3+2\cdot 1)\cdot 10\cdot 0{,}4 \Leftrightarrow \omega^2=25$$

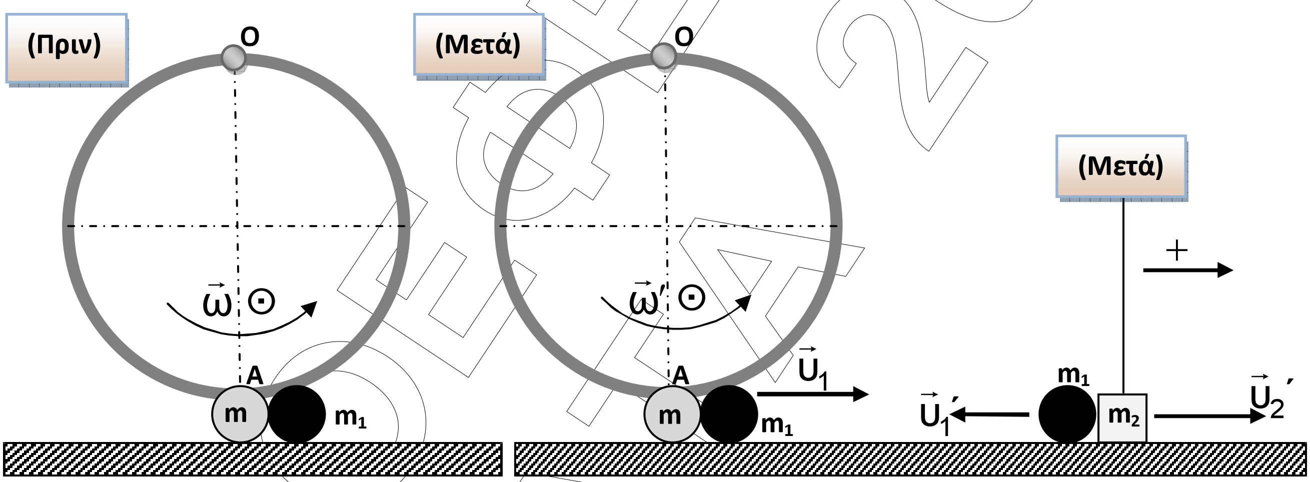
Επομένως προκύπτει: $\underline{\omega=5\ \text{rad/s}}$

Το ζητούμενο μέτρο της στροφορμής του δακτυλίου βρίσκεται από τη σχέση:

$L_{δακτ}=I_{δακτ(O)}\cdot\omega$ ή $L_{δακτ}=2\cdot MR^2\cdot\omega=2\cdot 3\cdot 0{,}4^2\cdot 5 \Leftrightarrow$

$$\boxed{L_{δακτ}=4{,}8\ \frac{Kg\cdot m^2}{s}}$$

Δ4.



Γνωρίζουμε την ταχύτητα υ_1' του σώματος $Σ_1$ μετά την κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα $Σ_2$, οπότε μπορούμε να βρούμε την ταχύτητα υ_1, που έχει το σώμα $Σ_1$ αμέσως μετά την κρούση του με το σύστημα δακτυλίου – σφαιριδίου. Προσέχουμε ότι το σώμα $Σ_1$ κινείται αντίθετα μετά την κρούση του με το $Σ_2$, οπότε με βάση τη φορά που ορίσαμε ως θετική, αλγεβρικά ισχύει υ_1'=-1 m/s. Επειδή η κρούση $Σ_1$-$Σ_2$ είναι ελαστική ισχύει:

$$\upsilon_1'=\frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon_1 \Leftrightarrow -1=\frac{1-2}{1+2}\upsilon_1 \Leftrightarrow \qquad \underline{\upsilon_1=3\,m/s}$$

Κατά την κρούση του συστήματος δακτύλιος – σφαιρίδιο με το σώμα $Σ_1$ μπορούμε να εφαρμόσουμε την αρχή διατήρησης της στροφορμής στο σύστημα δακτύλιος-σφαιρίδιο-m_1 ως προς τον άξονα περιστροφής, αφού $Στ_{εξωτ}$=0 (εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη και η δύναμη από τον άξονα). Από την Α.Δ.Σ έχουμε:

$$L_{ολ(πριν)}=L_{ολ(μετά)} \Leftrightarrow I_{ολ(0)}\cdot\omega=I_{ολ(0)}\cdot\omega'+m_1\upsilon_1 2R \Leftrightarrow 1{,}6\cdot 5=1{,}6\cdot\omega'+1\cdot 3\cdot 2\cdot 0{,}4$$

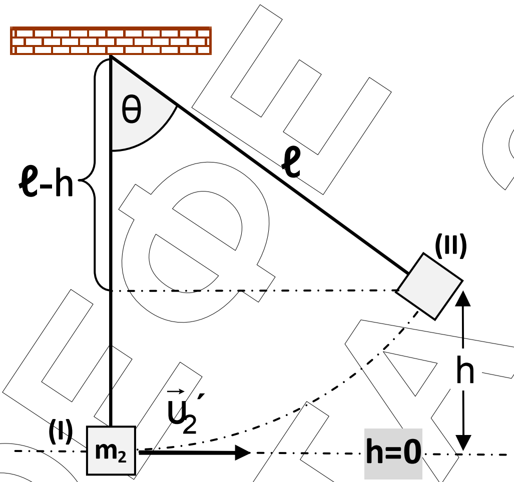
οπότε βρίσκουμε $\underline{\omega'=3{,}5\ rad/s}$

Η θερμική ενέργεια που εκλύεται κατά την κρούση του συστήματος με το σώμα Σ$_1$ υπολογίζεται από τη σχέση:

$$Q_{κρουσης}=|\Delta K_{ολ}|=K_{ολ(πριν)}-K_{ολ(μετά)}=\frac{1}{2}I_{ολ}\cdot\omega^2-(\frac{1}{2}I_{ολ}\cdot\omega'^2+\frac{1}{2}m_1\upsilon_1^2)$$

$$Q_{κρουσης}=\frac{1}{2}\cdot 1{,}6\cdot 5^2-(\frac{1}{2}\cdot 1{,}6\cdot 3{,}5^2+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^2)\Leftrightarrow \boxed{Q_{κρουσης}=5{,}7\text{ Joule}}$$

Δ5. Το σώμα Σ$_2$ μετά την κεντρική ελαστική κρούση του με το σώμα Σ$_1$ αποκτά ταχύτητα: $\upsilon_2'=\frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon_1\Leftrightarrow\upsilon_2'=\frac{2\cdot 1}{1+2}3\Leftrightarrow \underline{\upsilon_2'=2\,m/s}$



Το σώμα Σ$_2$ θα διαγράψει τόξο κύκλου μέσω του τεντωμένου νήματος, μέχρι να σταματήσει στιγμιαία. Κατά την κίνηση αυτή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη ενώ η μη συντηρητική τάση του νήματος είναι συνεχώς κάθετη στη μετατόπιση και δεν παράγει έργο.

Εφαρμόζοντας την αρχής διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Α.Δ.Μ.Ε.):

$E_{μηχ(I)}=E_{μηχ(II)}$ οπότε $K_{(I)}+U_{(I)}=K_{(II)}+U_{(II)}$

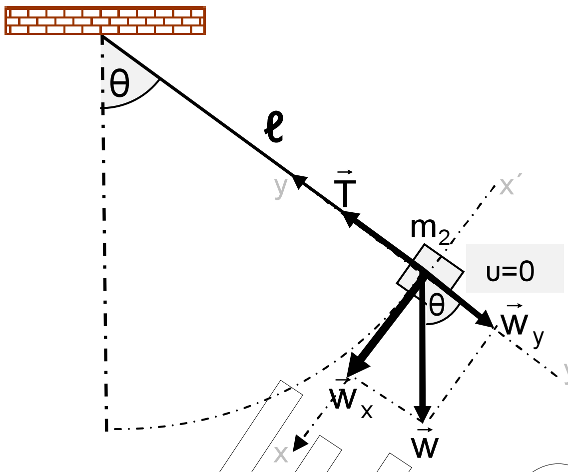
$$\frac{1}{2}m_2\cdot\upsilon_2'^2=m_2gh\Leftrightarrow h=\frac{\upsilon_2'^2}{2g}=\frac{2^2}{2\cdot 10}\Leftrightarrow \underline{h=0{,}2\text{ m}}$$

Παρατηρούμε ότι h<ℓ οπότε το σώμα Σ$_2$ σταματά στιγμιαία πριν το νήμα γίνει οριζόντιο. Από το παραπάνω σχήμα προκύπτει:

$$συνθ=\frac{\ell-h}{\ell}=1-\frac{h}{\ell}=1-\frac{0{,}2}{1}\Leftrightarrow \underline{συνθ=0{,}8}$$

Από την ταυτότητα $ημ^2θ+συν^2θ=1$ προκύπτει $\underline{ημθ=0{,}6}$

Το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της ορμής στη θέση της μέγιστης εκτροπής υπολογίζεται από τη σχέση : $\frac{dP}{dt}=\Sigma F=\sqrt{(\Sigma F_x)^2+(\Sigma F_y)^2}$



Το σώμα $Σ_2$ εκτελεί κυκλική κίνηση και συνεπώς η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας (άξονας y) εκφράζει την κεντρομόλο δύναμη. Συνεπώς ισχύει:

(άξονας y): $F_{κεντρ} = ΣF_y = \frac{m_2 \cdot υ^2}{\ell} = 0$ γιατί στιγμιαία υ=0.

Άρα:

$$\frac{dP}{dt} = ΣF = \sqrt{(ΣF_X)^2} = ΣF_X = w_X = m_2 g \cdot ημθ = 2 \cdot 10 \cdot 0{,}6$$

Οπότε:

$$\boxed{\frac{dP}{dt} = 12\ \text{N}}$$