**ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι**

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω συνεχής συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ με παράγουσα συνάρτηση F. Τι ονομάζεται ορισμένο ολοκλήρωμα της συνάρτησης f από το α έως το β;

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Εάν η τιμή του συντελεστή μεταβλητότητας είναι κάτω του 10%, ο πληθυσμός του δείγματος θεωρείται ομοιογενής.

(Μον. 2)

β) Εάν οι συναρτήσεις $f, g:A\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους, με $g(x)\neq 0$, τότε ισχύει:
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}.$$

(Μον. 2)

γ) Εάν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, τότε είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

(Μον. 2)

δ) Ισχύει ότι: $\int_{\alpha}^{\beta} e^x\,dx = \frac{e^{\beta+1}}{\beta+1} - \frac{e^{\alpha+1}}{\alpha+1}$ με $\alpha \neq -1$ και $\beta \neq -1$.

(Μον. 2)

ε) Δίνονται οι συναρτήσεις f,g συνεχείς στο [α,β]. Αν $f(x) \geq g(x)$ για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \eta\mu x\,dx = \ldots$

(Μον. 3)

β) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και c μία σταθερά, τότε:

$(c \cdot f)'(x) = \ldots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\alpha \in \mathbb{R}^*$ και $x > 0$, τότε:

$(x^{\alpha})' = \ldots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha^2 x + \ln x\,, & \text{αν } 0 < x \leq 1 \text{ και } \alpha \in \mathbb{R} \\ \dfrac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2}\,, & \text{αν } x > 1 \end{cases}$$

Β1. Να βρείτε το $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$.

Μονάδες 7

Β2. Να δείξετε ότι $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)=4$.

Μονάδες 10

Β3. Να βρείτε για ποιες τιμές του $\alpha\in\mathbb{R}$ η συνάρτηση f είναι συνεχής στο $x_0=1$.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι μισθοί των υπαλλήλων μίας εταιρείας (σε εκατοντάδες €):

Μισθός (εκατοντάδες €) x_i	Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i	Σχετική συχνότητα $f_i\%$	$x_i\nu_i$
6	25		
10	17		
15	6		
20	2		
Σύνολα	ν=...	100	

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 5

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ των μισθών των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Τι ποσοστό υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000 €;

Μονάδες 7

Γ4. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 των μισθών των υπαλλήλων της εταιρείας.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=(x-2)^2(x+\alpha)$, $x \in \mathbb{R}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της συνάρτησης f είναι $f'(x)=(x-2)(3x+2\alpha-2)$, $x \in \mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. Να βρείτε τον αριθμό α, αν η συνάρτηση f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_0=4$.

Μονάδες 5

Δ3. Για α=-5, να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε το είδος και τις τιμές των ακροτάτων.

Μονάδες 8

Δ4. Δίνονται οι συναρτήσεις $g(x)=3x^2-12x$, $x \in \mathbb{R}$ και $h(x)=6x-24$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου Ω, που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g(x) και h(x).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την

αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΠΕΜΠΤΗ 23 ΜΑΪΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 234

Α2. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος,
δ. Λάθος αν $α \neq β$ και Σωστό αν $α = β$, **ε.** Σωστό.

Α3. **α.** $\int_α^β ημx\,dx = [-συνx]_α^β = -συνβ + συνα$

β. $(c \cdot f)'(x) = c \cdot f'(x)$

γ. $(x^α)' = α \cdot x^{α-1}$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^-} (α^2 x + \ell n x) = \boldsymbol{α^2}$

Β2. $\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x^2 - x}{\sqrt{x+3} - 2} = \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x(x-1)(\sqrt{x+3}+2)}{(\sqrt{x+3}-2)(\sqrt{x+3}+2)}$

$= \lim\limits_{x \to 1^+} \frac{x\cancel{(x-1)}(\sqrt{x+3}+2)}{\cancel{x-1}} = \lim\limits_{x \to 1^+} \left[x(\sqrt{x+3}+2)\right] = \mathbf{4}.$

Β3. • $f(1) = 2 \Leftrightarrow α^2 \cdot 1 + \ell n 1 = α^2$

• Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 1$ πρέπει

$\lim\limits_{x \to 1^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = f(1) \Leftrightarrow$

$α^2 = 4 \Leftrightarrow \boldsymbol{α = \pm 2}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

x_i	v_i	$f_i\%$	$x_i \cdot v_i$
6	25	50	150
10	17	34	170
15	6	12	90
20	2	4	40
ΣΥΝΟΛΑ	v = 50	100	450

Γ2. $\bar{x} = \dfrac{x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \dfrac{450}{50} = \mathbf{9}$ εκατοντάδες ευρώ

Γ3. 1000 € = 10 εκατοντάδες €

$f_1\% + f_2\% = 50\% + 34\% = 84\%$

άρα το 84% των υπαλλήλων έχουν μισθό το πολύ 1000€.

Γ4.

x_i	v_i	$x_i \cdot v_i$	$\bar{x} - x_i$	$(\bar{x} - x_i)^2$	$(\bar{x} - x_i)^2 v_i$
6	25	150	3	9	225
10	17	170	-1	1	17
15	6	90	-6	36	216
20	2	40	-11	121	242
ΣΥΝΟΛΑ	v = 50	450	-	-	700

$$s^2 = \frac{(\bar{x}-x_1)^2v_1 + (\bar{x}-x_2)^2v_2 + (\bar{x}-x_3)^2v_3 + (\bar{x}-x_4)^2v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4} = \frac{700}{50} = \mathbf{14}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = (x-2)^2(x+\alpha)$

$$f'(x) = \left[(x-2)^2(x+\alpha)\right]' = \left[(x-2)^2\right]' \cdot (x+\alpha) + (x-2)^2 \cdot (x+\alpha)'$$

$$= 2(x-2)\cdot(x-2)'\cdot(x+\alpha) + (x-2)^2\cdot 1$$

$$= 2(x-2)\cdot(x+\alpha) + (x-2)^2 = (x-2)\cdot\left[2(x+\alpha) + (x-2)\right]$$

$$= (x-2)\cdot(2x+2\alpha+x-2) = (x-2)\cdot(3x+2\alpha-2)$$

Δ2. Για να παρουσιάζει η συνάρτηση ακρότατο στο $x_0 = 4$,
πρέπει $f'(4) = 0 \Leftrightarrow (4-2)(3\cdot 4 + 2\alpha - 2) = 0 \Leftrightarrow$
$2(2\alpha + 10) = 0 \Leftrightarrow 2\alpha + 10 = 0 \Leftrightarrow 2\alpha = -10 \Leftrightarrow \alpha = -5$

Δ3. $f(x) = (x-2)^2(x-5)$

$$f'(x) = (x-2)\cdot(3x-12) = 3x^2 - 6x + 24$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow (x-2)\cdot(3x-12) = 0 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ή } x = 4$$

x	$-\infty$		2		4		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	
$f(x)$		↗		↘		↗	

Η f είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 2]$ και $[4, +\infty)$ ενώ
είναι γνησίως φθίνουσα στο $[2, 4]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x = 2$ την τιμή $f(2) = 0$
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 4$ την τιμή $f(4) = -4$

Δ4. $g(x) - h(x) = 3x^2 - 12x - (6x - 24) = 3x^2 - 6x + 24 = f'(x)$
Είναι $f'(x) \le 0$ στο $[2, 4]$ από Δ3 ερώτημα

$$E = -\int_2^4 f'(x)\,dx = -\left[f(x)\right]_2^4 = -\left[f(4) - f(2)\right] = f(2) - f(4) = \mathbf{4\ τ.μ.}$$