ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η παράγωγος της ταυτοτικής συνάρτησης $f(x)=x$ είναι $f'(x)=1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_0 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Να δώσετε τον ορισμό της διαμέσου (δ) ενός δείγματος ν παρατηρήσεων.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για τη συνάρτηση $f(x)=\frac{1}{x}, x \neq 0$ ισχύει ότι $f'(x)=\frac{1}{x^2}$ (μονάδες 2)

β) Για το γινόμενο δύο παραγωγίσιμων συναρτήσεων f, g ισχύει ότι

$$\left(f(x)\,g(x)\right)' = f'(x)\,g(x)+f(x)\,g'(x)$$

(μονάδες 2)

γ) Το ραβδόγραμμα χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μιας ποσοτικής μεταβλητής. (μονάδες 2)

δ) Η διάμεσος είναι ένα μέτρο θέσης, το οποίο επηρεάζεται από τις ακραίες παρατηρήσεις. (μονάδες 2)

ε) Για δύο ενδεχόμενα A και B ενός δειγματικού χώρου Ω με $A \subseteq B$, ισχύει ότι $P(A) > P(B)$ (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται ο δειγματικός χώρος $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ και τα ενδεχόμενα

$$A = \{\omega_1, \omega_4\} \quad \text{και} \quad B = \{\omega_1, \omega_3\}$$

Για τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων $\{\omega_1\}$ και $\{\omega_3\}$ του Ω ισχύει ότι:

- $P(\omega_1) = -\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}$

- Η $P(\omega_3)$ είναι ίση με το ρυθμό μεταβολής της $f(x)$ ως προς x, όταν $x=1$, όπου

$$f(x) = \frac{x}{3}\ln x, \quad x > 0$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(\omega_1) = \dfrac{1}{4}$ και $P(\omega_3) = \dfrac{1}{3}$

Μονάδες 10

Β2. Να αποδείξετε ότι $\dfrac{1}{3} \le P(A') \le \dfrac{3}{4}$, όπου A' το συμπληρωματικό του Α.

Μονάδες 7

Β3. Αν $P(A') = \dfrac{3}{4}$, τότε να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_2)$, $P(\omega_4)$, $P\left[(A-B)\cup(B-A)\right]$ και $P(A'\text{-}B')$, όπου B' το συμπληρωματικό του Β.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής Χ, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 4 ισοπλατείς κλάσεις.

Δίνεται ότι:

- η μικρότερη παρατήρηση είναι 50
- η κεντρική τιμή της τέταρτης κλάσης είναι $x_4 = 85$
- η σχετική συχνότητα της τέταρτης κλάσης είναι διπλάσια της σχετικής συχνότητας της τρίτης κλάσης
- η διάμεσος των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\delta = 75$

  και
- η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x} = 74$

Γ1. Να αποδείξετε ότι το πλάτος είναι $c = 10$

Μονάδες 4

Γ2. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συμπληρωμένο σωστά

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική Συχνότητα f_i
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
[· , ·)		
Σύνολο		

Μονάδες 8

Γ3. Δίνεται ότι $f_1 = 0,1$, $f_2 = 0,3$, $f_3 = 0,2$ και $f_4 = 0,4$

Να αποδείξετε ότι η μέση τιμή των παρατηρήσεων, που είναι μικρότερες του 80, είναι $\frac{200}{3}$

Μονάδες 7

Γ4. Επιλέγουμε κ παρατηρήσεις του αρχικού δείγματος με $\kappa < \nu$, οι οποίες ακολουθούν κανονική κατανομή με

- το 2,5% των παρατηρήσεων αυτών να είναι τουλάχιστον 74
- το 16% των παρατηρήσεων αυτών να είναι το πολύ 68

Να βρείτε τη μέση τιμή και την τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων αυτών καθώς και να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων αυτών είναι ομοιογενές.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x\ln x + \kappa$, $x > 0$, όπου κ ακέραιος με $\kappa > 1$ και την εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(1, f(1))$, η οποία σχηματίζει με τους άξονες, τρίγωνο εμβαδού E, με $E < 2$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa = 2$

Μονάδες 5

Δ2. Έστω $x_1, x_2, ..., x_{50}$ οι τετμημένες 50 σημείων της (ε) των οποίων οι αντίστοιχες τεταγμένες τους έχουν μέση τιμή $\overline{y}=31$

α) Να αποδείξετε ότι $\overline{x}=30$ (μονάδες 2)

β) Για τις τετμημένες των παραπάνω σημείων θεωρούμε ότι :

Κάθε μία από τις τετμημένες $x_1, x_2, ..., x_{20}$ αυξάνεται κατά 3, οι επόμενες 15 τετμημένες παραμένουν σταθερές και κάθε μία από τις υπόλοιπες ελαττώνεται κατά $\lambda \in \mathbb{R}$ με $\lambda > 0$.

Να βρείτε το λ, ώστε η νέα μέση τιμή των τετμημένων να είναι ίση με 31 (μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ3. Αν $\frac{1}{e} < \alpha < \beta < \gamma < e$ με $\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} = e^7$, τότε να βρείτε το εύρος R και τη μέση τιμή των τιμών $f(\alpha), f(\beta), f(\gamma), f(e), f'\left(\frac{1}{e}\right)$, όπου $f(x) = x\ln x + 2$

Μονάδες 7

Δ4. Θεωρούμε τον δειγματικό χώρο

$$\Omega = \left\{ t_n,\ n = 1,2,3,...,30 :\ 0 < t_1 < t_2 < ... < t_{10} < \frac{1}{e} < t_{11} < ... < t_{30} = 1 \right\}$$

με ισοπίθανα απλά ενδεχόμενα, καθώς και τα ενδεχόμενα

Α={$t \in \Omega$: η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $(t, f(t))$, να σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ οξεία γωνία },

$B = \{ t \in \Omega :\ f(t) > f'(t) + 1 \}$,

όπου $f(t) = t\ln t + 2$

Να βρεθούν οι πιθανότητες:

α) να πραγματοποιηθεί το ενδεχόμενο Α (μονάδες 3)

β) να πραγματοποιηθούν συγχρόνως τα ενδεχόμενα Α και Β (μονάδες 4)

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ..
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 20 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ.28

Α2. Θεωρία σχολικό σελ.14

Α3. Θεωρία σχολικό σελ.87

Α4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Λάθος

δ. Λάθος

ε. Λάθος

ΘΕΜΑ Β

Β1.
Είναι,

$$P(\omega_1)=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}-1}{x^3+x^2}\cdot\frac{\sqrt{x^2+x+1}+1}{\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{\sqrt{x^2+x+1}^2-1^2}{x^2(x+1)\cdot\left(\sqrt{x^2+x+1}+1\right)}$$

$$=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x^2+x+1-1}{x^2(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{x(x+1)}{x^2(x+1)\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=-\frac{1}{2}\lim_{x\to-1}\frac{1}{x\cdot\sqrt{x^2+x+1}+1}=$$

$$-\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

Άρα $P\left(\omega_1\right)=\dfrac{1}{4}$.

Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη για κάθε $x \succ 0$ με παράγωγο,

$$f'(x)=\frac{x}{3}\ln x+\frac{x}{3}(\ln x)'=\frac{1}{3}\ln x+\frac{x}{3}\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{3}\ln x+\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(\ln x+1)$$

Επομένως ο ρυθμός μεταβολής της f(x) για x=1 είναι το $f'(1)=\dfrac{1}{3}(0+1)=\dfrac{1}{3}$.

Άρα $P\left(\omega_3\right)=\dfrac{1}{3}$.

Β2. Από τον αξιωματικό ορισμό ισχύει ότι,

$$P(A)=P(\omega_1)+P(\omega_4)$$
$$P(B)=P(\omega_1)+P(\omega_3)=\frac{1}{4}+\frac{1}{3}=\frac{7}{12}$$

Επίσης είναι, $A'=\left\{\omega_2,\omega_3\right\}$

Ισχύει ότι $\left\{\omega_3\right\}\subseteq \mathrm{A}' \Rightarrow P(\omega_3)\le P(A') \Leftrightarrow \dfrac{1}{3}\le P(A)'$ (1)

Ισχύει επίσης ότι, $A'\subseteq\left\{\omega_1\right\}' \Leftrightarrow \left\{\omega_2,\omega_3\right\}\subseteq\left\{\omega_2,\omega_3,\omega_4\right\}$

Άρα, $P(A')\le P(\left\{\omega_1\right\}')=P(A')\le P\left[\left(\omega_1\right)'\right]$, οπότε

$$P(A')\le 1-P(\omega_1) \Leftrightarrow P(A')\le 1-\frac{1}{4} \Leftrightarrow P(A')\le\frac{3}{4} \quad (2)$$

Από τις (1) και (2) ισχύει $\dfrac{1}{3}\le P(A')\le\dfrac{3}{4}$.

Β3. Έχουμε,

$$P(A)'=\frac{3}{4} \Leftrightarrow 1-P(A)=\frac{3}{4} \Leftrightarrow P(A)=\frac{1}{4}$$

Άρα, $P(\omega_1)+P(\omega_4)=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow \dfrac{1}{4}+P(\omega_4)=\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow P(\omega_4)=0$

Όμως

$$P(\omega_1)+P(\omega_2)+P(\omega_3)+P(\omega_4)=1 \Leftrightarrow \frac{1}{4}+P(\omega_2)+\frac{1}{3}+0=1 \Leftrightarrow P(\omega_2)=\frac{12}{12}-\frac{3}{12}-\frac{4}{12}=\frac{5}{12}$$

Συνεπώς $P(\omega_2)=\dfrac{5}{12}$.

Έχουμε,

$$P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]\overset{\left(A-B\right)\cap\left(B-A\right)=\varnothing}{=}P\left(A-B\right)+P\left(B-A\right)=P(A)-P(A\cap B)+P(B)-P(A\cap B)=$$
$$P(A)+P(B)-2P(A\cap B)$$

Το ενδεχόμενο $A\cap B=\{\omega_1\}$, άρα $P(A\cap B)=P(\omega_1)$.

Οπότε,

$$P\left[\left(A-B\right)\cup\left(B-A\right)\right]=P(\omega_1)+P(\omega_4)+P(\omega_1)+P(\omega_3)-2P(\omega_1)=P(\omega_3)+P(\omega_4)=\frac{1}{3}+0=\frac{1}{3}$$

Επίσης είναι, $A'=\{\omega_2,\omega_3\}$, $\mathrm{B}'=\{\omega_2,\omega_4\}$.

$\acute{A}\rho\alpha \quad \mathrm{A}'-\mathrm{B}'=\{\omega_3\}$

Επομένως, $P(A'-B')=P(\omega_3)=\dfrac{1}{3}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Ισχύει ότι, $\dfrac{50+3c+50+4c}{2}=85\Leftrightarrow 100+70=170\Leftrightarrow c=10$

Γ2.

Επειδή σε κάθε κλάση οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες ισχύει ότι στα διαστήματα [70,75] και [75,80] ανήκει το $\dfrac{f_3}{2}$ των παρατηρήσεων.

Η διάμεσος είναι η τιμή για την οποία το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες από αυτήν και το πολύ 50% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες από την τιμή αυτή.

Συνεπώς είναι $\dfrac{f_3}{2}+f_4=0,5$ (1)

Αλλά δίνεται $f_4=2f_3$ (2)

Επομένως η (1) μέσω της (2) γίνεται

$$\frac{f_3}{2}+2f_3=0,5\Leftrightarrow f_3+4f_3=1\Leftrightarrow 5f_3=1\Leftrightarrow f_3=\frac{1}{5}=0,2$$

Άρα από τη σχέση (2) προκύπτει $f_4=2\cdot(0,2)=0,4$.

Επίσης έχουμε,

$$\bar{x}=74 \Leftrightarrow x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3+x_4\cdot f_4=74 \Leftrightarrow 55f_1+65f_2+15+34=74 \Leftrightarrow$$
$$55f_1+65f_2=25 \Leftrightarrow 11f_1+13f_2=5 \quad (3)$$

Είναι επίσης $f_1+f_2+f_3+f_4=1 \Leftrightarrow f_1+f_2+f_3+2f_3=1 \Leftrightarrow f_1+f_2=1-2\cdot 0,2=0,6$ και άρα $f_1+f_2=0,6 \quad (4)$.

Λύνουμε το σύστημα των (3) και (4) και παίρνουμε $f_1=0,2$ και $f_4=0,4$

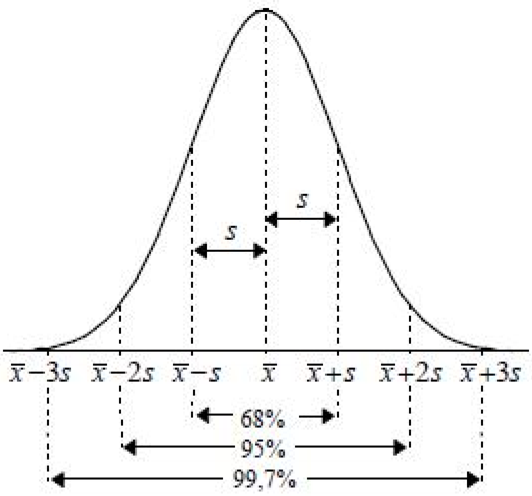
Έτσι ο πίνακας συμπληρώνεται ως εξής.

Κλάσεις	Κεντρικές Τιμές x_i	Σχετική συχνότητα f_i
[50,60)	55	0,1
[60,70)	65	0,3
[70,80)	75	0,2
[80,90)	85	0,4
Σύνολο	-	1

Γ3.
Για την μέση τιμή έχουμε,

$$\bar{x}=\frac{x_1\cdot v_1+x_2\cdot v_2+x_3\cdot v_3}{v_1+v_2+v_3}=\frac{x_1\cdot f_1\cdot v+x_2\cdot f_2\cdot v+x_3\cdot f_3\cdot v}{f_1\cdot v+f_2\cdot v+f_3\cdot v}=\frac{x_1\cdot f_1+x_2\cdot f_2+x_3\cdot f_3}{f_1+f_2+f_3}$$
$$=\frac{5,5+19,5+15}{0,6}=\frac{40}{0,6}=\frac{400}{6}=\frac{200}{3}$$

Γ4.



Το 2,5% των παρατηρήσεων ισούται με $\frac{100-95}{2}\%$

Επειδή το 2,5% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του $\bar{x}+25$ προκύπτει $\bar{x}+25$=74 (1).

Το 16% των παρατηρήσεων είναι ίσο με $\frac{100-68}{2}$% άρα το 16% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες ή ίσες του $\bar{x}-s$.

Οπότε $\bar{x}-s$=68 (2)

Λύνοντας το σύστημα των (1), (2) προκύπτει $\bar{x}=70$ και $s=2$.

Ο συντελεστής μεταβολής ισούται με $CV=\frac{s}{|\bar{x}|}=\frac{2}{70}=\frac{1}{35}<\frac{1}{10}$. Άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη για κάθε $x>0$ με $f'(x)=(x)'\ln x+x(\ln x)'=\ln x+1$ και $f(1)=\kappa$ και $f'(1)=1$.

Τότε η εξίσωση εφαπτομένης της C_f στο $(1,f(1))$ είναι η:

$$(\varepsilon): y-f(1)=f'(1)(x-1)\Leftrightarrow y-\kappa=x-1\Leftrightarrow y=x+\kappa-1$$

Τέμνει τον x΄x όταν $y=0\Leftrightarrow x=1-\kappa$

Τέμνει τον y΄y όταν $x=0\Leftrightarrow y=\kappa-1$

$E=\frac{1}{2}(x_A)(y_B)=\frac{1}{2}|1-\kappa||\kappa-1|=\frac{1}{2}|\kappa-1|^2$

Θέλουμε $E<2\Leftrightarrow|\kappa-1|^2<4\Leftrightarrow|\kappa-1|<2\Leftrightarrow-2<\kappa-1<2\Leftrightarrow-1<\kappa<3\underset{\kappa>1}{\overset{\kappa\in\mathbb{Z}}{\Leftrightarrow}}\boxed{\kappa=2}$

Δ2. α. Άρα για κ = 2 είναι η $f(x)=x\ln x+2$ και η $(\varepsilon): y=x+1\Leftrightarrow x=y-1$

Οι τιμές x_i προκύπτουν από τις y_i αν προσθέσουμε $c_1=-1$. Τότε από βασική εφαρμογή έχουμε: $\bar{x}=\bar{y}+c_1\Leftrightarrow\bar{x}=31-1\Leftrightarrow\boxed{\bar{x}=30}$

β. $\bar{x}=\frac{x_1+x_2+...+x_{50}}{50}\Leftrightarrow 30\cdot 50=x_1+x_2+...+x_{50}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x_1+x_2+...+x_{50}=1500$ (1)

$\bar{x}'=\frac{x_1'+x_2'+...+x_{50}'}{50}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\bar{x}'=\frac{x_1'+x_2'+...+x_{20}'+x_{21}'+...+x_{35}'+x_{30}'+...+x_{50}'}{50}\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 31\cdot 50=x_1+3+x_2+3+...+x_{20}+3+x_{21}+...+x_{35}+x_{30}-\lambda+...+x_{50}-\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1550=(x_1+x_2+...+x_{20})+20\cdot 30+(x_{21}+...+x_{35})+(x_{36}+x_{50})-15\lambda\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 1550=(x_1+x_2+...+x_{50})+60-15\lambda\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 1550 = 1500 + 60 - 15\lambda \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 1560 - 1550 = 15\lambda \Leftrightarrow 10 = 15\lambda \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{2}{3}}$$

Δ3. $f'(x) = \ln x + 1$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{e}$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -1 \Leftrightarrow x > \frac{1}{e}$

x	0	$1/e$	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Άρα η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο $x_0 = \frac{1}{e}$ με $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$

Άρα για κάθε $x \in A_f$ το $f(x) \geq f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{1}{e} + 2 > 0$.

Τα $\alpha, \beta, \gamma, e \in \left(\frac{1}{e}, e\right]$ με $\alpha < \beta < \gamma < e \overset{f(x)\nearrow}{\Leftrightarrow} f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$

$$-\frac{1}{e} + 2 \leq f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Όμως $f'\left(\frac{1}{e}\right) = 0$ άρα:

$$0 < -\frac{1}{e} + 2 < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow f'\left(\frac{1}{e}\right) < f(\alpha) < f(\beta) < f(\gamma) < f(e)$$

Τότε $R = f(e) - f'\left(\frac{1}{e}\right) = e\ln e + 2 - 0 = e + 2$ δηλαδή $\boxed{R = e + 2}$

$$\bar{x} = \frac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} x_i = \frac{1}{5}\left[f'\left(\frac{1}{e}\right) + f(\alpha) + f(\beta) + f(\gamma) + f(e)\right] =$$

$$= \frac{1}{5}\left(0 + \alpha\ln\alpha + 2 + \beta\ln\beta + 2 + \gamma\ln\gamma + 2 + e\ln e + 2\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\alpha^{\alpha} + \ln\beta^{\beta} + \ln\gamma^{\gamma} + 6 + 2 + e\right) =$$

$$= \frac{1}{5}\left(\ln\alpha^{\alpha} \cdot \beta^{\beta} \cdot \gamma^{\gamma} + 8 + e\right) = \frac{1}{5}\left(\ln e^{7} + 8 + e\right) = \frac{1}{5}(7 + 8 + e) = \frac{15 + e}{5}$$

Άρα $\boxed{\bar{x} = \frac{15 + e}{5}}$

Δ4. $f'(t) = \varepsilon\varphi\hat{\omega} \underset{\varepsilon\varphi\hat{\omega}>0}{\overset{\hat{\omega}=90°}{\Leftrightarrow}} f'(t) > 0 \Leftrightarrow \ln t + 1 > 0 \Leftrightarrow$

$\ln t > -1 \Leftrightarrow t > \dfrac{1}{e}$ άρα $A = \{t_{11}, t_{12}, ..., t_{30}\}$

$f(t) > f'(t) + 1 \Leftrightarrow t\ln t \cancel{+2} > \ln t \cancel{+1+1} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t\ln t - \ln t > 0 \Leftrightarrow \ln t(t-1) > 0$

x	0		1		$+\infty$
$t-1$		$-$	0	$+$	
$\ln t$		$-$	0	$+$	
Γινόμενο		$+$	0	$+$	

Άρα $\Gamma > 0 \Leftrightarrow t \in (0,1) \cup (1, +\infty)$

Επομένως $B = \{t_1, t_2, ..., t_{29}\}$

α) $P(A) = \dfrac{N(A)}{N(\Omega)} = \dfrac{20}{30} = \dfrac{2}{3}$

β) $P(A \cap B) = \dfrac{N(A \cap B)}{N(\Omega)} = \dfrac{19}{30}$