ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι για δύο συμπληρωματικά ενδεχόμενα Α και A' ισχύει:

$$P(A') = 1 - P(A)$$

Μονάδες 7

Α2. Να ορίσετε το μέτρο διασποράς **εύρος** ή **κύμανση**.

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται παράγωγος μιας συνάρτησης f στο σημείο x_o του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) $\lim\limits_{x \to x_o} (\sigma\upsilon\nu x) = \sigma\upsilon\nu x_o$

(μονάδες 2)

β) $\left(c\, f(x)\right)' = c\, f'(x)$

(μονάδες 2)

γ) Σε μια ποσοτική μεταβλητή αντί του ραβδογράμματος χρησιμοποιείται το **διάγραμμα συχνοτήτων**.

(μονάδες 2)

δ) Ένα δείγμα τιμών μιας μεταβλητής Χ χαρακτηρίζεται ομοιογενές, όταν ο συντελεστής μεταβολής ξεπερνά το 10%

(μονάδες 2)

ε) Δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω λέγονται ασυμβίβαστα, όταν $A \cap B \neq \varnothing$

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2e^x(2x-3)$, $x \in \mathbb{R}$

Θεωρούμε επίσης δύο ενδεχόμενα Α και Β ενός δειγματικού χώρου Ω με

$$P(A) = x_1 \quad \text{και} \quad P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}}$$

όπου η f παρουσιάζει ελάχιστο στο x_1

Β1. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $P(A) = \frac{1}{2}$ και $P(B) = \frac{2}{3}$

Μονάδες 6

Β3. Να αποδείξετε ότι τα ενδεχόμενα Α και Β δεν είναι ασυμβίβαστα

Μονάδες 5

και

Β4. Να αποδείξετε ότι $\frac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \frac{2}{3}$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Εξετάζουμε ένα δείγμα μεγέθους ν ως προς μία ποσοτική μεταβλητή Χ και ομαδοποιούμε τις παρατηρήσεις του δείγματος σε 5 ισοπλατείς κλάσεις πλάτους c, όπως φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

Κλάσεις	**Κεντρικές τιμές x_i**	**f_i%**	**F_i**	**F_i%**
[α, ·)				λ
[· , ·)				3λ + 10
[· , ·)				
[· , ·)				$κλ^2 - 2λ + 10$
[· , ·)				$κλ^2 - 3λ + 30$
Σύνολα				

Δίνεται ότι οι αθροιστικές σχετικές συχνότητες F_3 και F_5 είναι οι ρίζες της εξίσωσης:

$$5x^2 - 8x + 3κ = 0 \text{ , όπου } x \in \mathbb{R} \text{ και } κ \in \mathbb{R}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι κ = 1 και λ = 10

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $f_1\% = 10$, $f_2\% = 30$, $f_3\% = 20$, $f_4\% = 30$ και $f_5\% = 10$

Μονάδες 5

Γ3. Αν το 25% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 16 και το 25% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 24, τότε να αποδείξετε ότι α = 10 και c = 4

(μονάδες 4)

Στη συνέχεια να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα κατάλληλα συμπληρωμένο.

(μονάδες 4)

Μονάδες 8

Γ4. Αν το πλήθος των παρατηρήσεων που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22 είναι 800, τότε να υπολογίσετε το μέγεθος του δείγματος.

Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{x}{x^2+1} + 1$, $x \in \mathbb{R}$ και ο δειγματικός χώρος

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, όπου $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 0$ και $1 < \omega_3 < \omega_4$

Δίνονται, επίσης, οι πιθανότητες $P(\omega_i) = f(\omega_i) - \dfrac{1}{3}$, όπου $i = 1, 2$

και

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6}\lim_{x\to 1}\frac{f'(x)}{x-1}$$

Δ1. Θεωρούμε τα ενδεχόμενα Α, Β και Γ του δειγματικού χώρου Ω με

$$A = \left\{\omega \in \Omega \ / \ f'(\omega) \le 0\right\}, \qquad B = \left\{\omega \in \Omega \ / \ f(\omega) > 1\right\}$$

και

$$\Gamma = \left\{\omega \in \Omega \ / \ x^2 + \omega x \ge -\frac{1}{4} \ \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}\right\}$$

α) Να βρείτε τις πιθανότητες $P(\omega_1)$, $P(\omega_2)$, $P(\omega_3)$ και $P(\omega_4)$

(μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις πιθανότητες P(A), P(B), P(Γ) και P(A-B)

(μονάδες 8)
Μονάδες 16

Δ2. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης (ε) της γραφικής παράστασης της f, η οποία σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 45^o

Μονάδες 4

Δ3. Αν $M_κ(ω_κ,\ y_κ)$, $κ = 1, 2, 3, 4$ είναι σημεία της εφαπτομένης (ε): $y = x + 1$ με

$$2δ_{ω_κ} = δ_{y_κ} \text{ και } R_{y_κ} = 5$$

τότε να υπολογίσετε τα $ω_3$ και $ω_4$ του δειγματικού χώρου Ω, όπου

$δ_{ω_κ}$: η διάμεσος των τετμημένων των σημείων $M_κ$,

$δ_{y_κ}$: η διάμεσος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$ και

$R_{y_κ}$: το εύρος των τεταγμένων των σημείων $M_κ$

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και **να μην γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και ΜΟΝΟ για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:15

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΔΕΥΤΕΡΑ 10 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 92

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22

Α4. α. Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό*, **δ.** Λάθος, **ε.** Λάθος.

***έπρεπε να δίνεται ότι η μεταβλητή είναι ποσοτική διακριτή**

ΘΕΜΑ Β

Β1. $f'(x) = \left[2e^x(2x-3)\right]' = 2e^x(2x-3) + 4e^x = 2e^x(2x-1)$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2e^x(2x-1) \Leftrightarrow x = \dfrac{1}{2}$

x	$-\infty$		$\dfrac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στο $\left(-\infty, \dfrac{1}{2}\right]$, ενώ είναι γνησίως αύξουσα στο $\left[\dfrac{1}{2}, +\infty\right)$. Η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_1 = \dfrac{1}{2}$ την τιμή $f(x_1) = f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 2e^{\frac{1}{2}}\left(2\cdot\dfrac{1}{2} - 3\right) = 2\sqrt{e}(-2) = -4\sqrt{e}$

B2. $P(A) = x_1 = \mathbf{\dfrac{1}{2}}$

$$P(B) = -\frac{f(x_1)}{6\sqrt{e}} = -\frac{-4\sqrt{e}}{6\sqrt{e}} = \frac{4}{6} = \mathbf{\frac{2}{3}}$$

B3. Έστω ότι Α, Β είναι ασυμβίβαστα

Ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} = \frac{7}{6} > 0 \ \rightarrow \ \text{ΑΤΟΠΟ}$$

Άρα **τα Α, Β δεν είναι ασυμβίβαστα**.

B4. $A' - B' = A' \cap (B')' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

- $B - A \subseteq B \ \Rightarrow \ P(B - A) \leq P(B) \ \Leftrightarrow \ P(A' - B') \leq \dfrac{2}{3}$ **(1)**

  ή $A' - B' \subseteq A' \ \Rightarrow \ P(A' - B') \leq P(A') \ \Leftrightarrow \ P(A' - B') \leq \dfrac{1}{2} < \dfrac{2}{3}$ **(1)**

- Θα δείξουμε ότι $\dfrac{1}{6} \leq P(A' - B') \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{6} \leq P(B - A) \ \Leftrightarrow$

  $\dfrac{1}{6} \leq P(B) - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow \ \dfrac{1}{6} \leq \dfrac{2}{3} - P(A \cap B) \ \Leftrightarrow$

  $P(A \cap B) \leq \dfrac{2}{3} - \dfrac{1}{6} \ \Leftrightarrow \ P(A \cap B) \leq \dfrac{1}{2}$ που ισχύει διότι

  $A \cap B \subseteq A \ \Rightarrow \ P(A \cap B) \leq P(A) \ \Leftrightarrow \ P(A \cap B) \leq \dfrac{1}{2}$

  άρα $\dfrac{1}{6} \leq P(A' - B')$ **(2)**

Από (1) και (2) : $\mathbf{\dfrac{1}{6} \leq P(A' - B') \leq \dfrac{2}{3}}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $F_5 = 1$ και $F_5\% = 100$

Από τύπους Vieta έχουμε :

$$\begin{cases} F_3 + F_5 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 \cdot F_5 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \overset{F_5 = 1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} F_3 + 1 = \dfrac{8}{5} \\ F_3 = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \dfrac{3}{5} = \dfrac{3\kappa}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_3 = \dfrac{3}{5} \\ \boldsymbol{\kappa = 1} \end{cases}$$

$F_5\% = 100 \Leftrightarrow \kappa\lambda^2 - 3\lambda + 30 = 100 \overset{\kappa = 1}{\Leftrightarrow} \lambda^2 - 3\lambda - 70 = 0$

$\Delta = 289$ και $\lambda = 10$ ή $\lambda = -7$

Όμως $F_1\% = \lambda \geq 0$, άρα $\boldsymbol{\lambda = 10}$

Γ2. $f_1\% = F_1\% = \lambda = \mathbf{10}$

$F_2\% = 3\lambda + 10 = 40$

$f_2\% = F_2\% - F_1\% = 40 - 10 = \mathbf{30}$

$F_3\% = 100 \cdot F_3 = 60$

$f_3\% = F_3\% - F_2\% = 60 - 40 = \mathbf{20}$

$F_4\% = \kappa\lambda^2 - 2\lambda + 10 = 90$

$f_4\% = F_4\% - F_3\% = 90 - 60 = \mathbf{30}$

$f_5\% = F_5\% - F_4\% = 100 - 90 = \mathbf{10}$

Γ3.
- $25\% = f_1\% + \dfrac{f_2\%}{2} \Rightarrow x_2 = 16$ **(1)**
- $25\% = \dfrac{f_4\%}{2} + f_5\% \Rightarrow x_4 = 24$ **(2)**
- $x_4 - x_2 = 2c \underset{(2)}{\overset{(1)}{\Leftrightarrow}} 2c = 8 \Leftrightarrow \mathbf{c = 4}$

1^{η} κλάση : [α , α + 4), 2^{η} κλάση : [α + 4 , α + 8)

$x_2 = \dfrac{\alpha + 4 + \alpha + 8}{2} \Leftrightarrow 16 = \dfrac{2\alpha + 12}{2} \Leftrightarrow$

$2\alpha + 12 = 32 \Leftrightarrow 2\alpha = 20 \Leftrightarrow \boldsymbol{\alpha = 10}$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	$f_i\%$	F_i	$F_i\%$
[10 , 14)	**12**	**10**	**0,1**	**10**
[14 , 18)	**16**	**30**	**0,4**	**40**
[18 , 22)	**20**	**20**	**0,6**	**60**
[22 , 26)	**24**	**30**	**0,9**	**90**
[26 , 30)	**28**	**10**	**1**	**100**
ΣΥΝΟΛΑ	-	**100**	-	-

Γ4. Το 40% ($f_4\% + f_5\%$) των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 22.

Στο 40% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν 800 παρατηρήσεις

Στο 100% των παρατηρήσεων αντιστοιχούν ν παρατηρήσεις

$40\nu = 800 \cdot 100 \Leftrightarrow 40\nu = 80000 \Leftrightarrow \boldsymbol{\nu = 2000}$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.α.

- $P(\omega_1) = P(-1) = f(-1) - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{1}{6}}$

- $P(\omega_2) = P(0) = f(0) - \frac{1}{3} = 1 - \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}}$

- $f'(x) = \left(\frac{x}{x^2+1} + 1\right)' = \frac{(x^2+1) - x \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{-\cancel{(x-1)}(x+1)}{(x^2+1)^2}}{\cancel{x-1}} = \lim_{x\to 1} \frac{-(x+1)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

$$P(\omega_3) = -\frac{1}{6} \cdot \lim_{x\to 1} \frac{f'(x)}{x-1} = -\frac{1}{6} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$$

- $P(\omega_4) = 1 - P(\omega_1) - P(\omega_2) - P(\omega_3) = 1 - \frac{1}{6} - \frac{2}{3} - \frac{1}{12} = \boldsymbol{\frac{1}{12}}$

Δ1.β. • $f'(\omega) \leq 0 \Leftrightarrow \dfrac{1-\omega^2}{(\omega^2+1)^2} \leq 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} 1-\omega^2 \leq 0 \Leftrightarrow$

$\omega^2 \geq 1 \Leftrightarrow |\omega| \geq 1 \Leftrightarrow \omega \geq 1$ ή $\omega \leq -1$

Άρα $A = \{-1, \omega_3, \omega_4\}$

και $P(A) = P(-1) + P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \mathbf{\dfrac{1}{3}}$

• $f(\omega) > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} + 1 > 1 \Leftrightarrow \dfrac{\omega}{\omega^2+1} > 0 \overset{\omega^2+1>0}{\Leftrightarrow} \omega > 0$

Άρα $B = \{\omega_3, \omega_4\}$

και $P(B) = P(\omega_3) + P(\omega_4) = \dfrac{1}{12} + \dfrac{1}{12} = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

• $x^2 + \omega x \geq -\dfrac{1}{4}$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow x^2 + \omega x + \dfrac{1}{4} \geq 0$, για κάθε $x \in IR$

Πρέπει $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 - 1 \leq 0 \Leftrightarrow \omega^2 \leq 1 \Leftrightarrow |\omega| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq \omega \leq 1$

Άρα $\Gamma = \{-1, 0\}$

και $P(\Gamma) = P(-1) + P(0) = \dfrac{1}{6} + \dfrac{2}{3} = \mathbf{\dfrac{5}{6}}$

• $A - B = \{-1\}$ και $P(A - B) = P(-1) = \mathbf{\dfrac{1}{6}}$

Δ2. • $f'(x_0) = \varepsilon\varphi 45^0 = 1 \Rightarrow \dfrac{1-x_0^2}{(x_0^2+1)^2} = 1 \Leftrightarrow$

$(x_0^2+1)^2 = 1 - x_0^2 \Leftrightarrow x_0^4 + 2x_0^2 + \cancel{1} = \cancel{1} - x_0^2 \Leftrightarrow$

$x_0^4 + 3x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0^2(x_0^2+3) = 0 \overset{x_0^2+3\neq 0}{\Leftrightarrow} x_0^2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = 0$

$f(0) = 1$ και $f'(0) = 1$, άρα

$(\varepsilon): y - f(0) = f'(0)\cdot(x-0) \Leftrightarrow y - 1 = x \Leftrightarrow \mathbf{y = x + 1}$

Δ3. $\omega_i = -1 , 0 , \omega_3 , \omega_4$

- $M_1 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_1 = \omega_1 + 1 = -1 + 1 = 0$
- $M_2 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_2 = \omega_2 + 1 = 0 + 1 = 1$
- $M_3 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_3 = \omega_3 + 1$
- $M_4 \in \varepsilon \Leftrightarrow y_4 = \omega_4 + 1$

Είναι $1 < \omega_3 < \omega_4$, άρα $y_1 < y_2 < y_3 < y_4$

$R_y = y_4 - y_1 \Leftrightarrow 5 = (\omega_4 + 1) - 0 \Leftrightarrow 5 = \omega_4 + 1 \Leftrightarrow$ $\boldsymbol{\omega_4 = 4}$

- $\delta_{\omega_\kappa} = \dfrac{0 + \omega_3}{2} = \dfrac{\omega_3}{2}$
- $\delta_{y_\kappa} = \dfrac{1 + \omega_3 + 1}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2}$

Είναι $2\delta_{\omega_\kappa} = \delta_{y_\kappa} \Leftrightarrow$

$2\dfrac{\omega_3}{2} = \dfrac{2 + \omega_3}{2} \overset{(\cdot 2)}{\Leftrightarrow}$

$2\omega_3 = 2 + \omega_3 \Leftrightarrow$

$\boldsymbol{\omega_3 = 2}$