ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha, \beta]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[\alpha, \beta]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t)dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

Α3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \to x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta\mu x| \le |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sigma\upsilon\nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z, είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z|\leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

Β2. Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2+\beta w+\gamma=0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta,\gamma\in\mathbb{R}$, και

$$\left|\operatorname{Im}(z_1)-\operatorname{Im}(z_2)\right|=2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta=-4 \quad \text{και} \quad \gamma=5$$

Μονάδες 9

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0, α_1, α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v|<4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $\left(f(x)+x\right)\left(f'(x)+1\right)=x$, για κάθε $x\in\mathbb{R}$
- $f(0)=1$ και
- $g(x)=x^3+\dfrac{3x^2}{2}-1$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2+1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^{0} f(t)\,dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \text{εφ}\, x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f:(0,+\infty) \to \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0,+\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^{x} \frac{f(t)-1}{t-1}\,dt, \quad x \in (1,+\infty) \quad \text{και} \quad \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο $\mathbb{R}$

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)\,du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)\,du \qquad \text{(μονάδες 6)}$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha-1)\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\left(f(\alpha)-1\right)(x-\alpha),\qquad x>1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. <u>Στο εξώφυλλο</u> του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω</u> να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. <u>Στην αρχή των απαντήσεών σας</u> να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Να μην αντιγράψετε</u> τα θέματα στο τετράδιο και **<u>να μην γράψετε</u>** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **<u>στο τετράδιό σας</u>** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικό σελ.335

Α2. Θεωρία σχολικό σελ.246

Α3. Θεωρία σχολικό σελ.222

Α4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

Β1.

$$(z-2)\overline{(z-2)}+|z-2|=2 \Leftrightarrow |z-2|^2+|z-2|-2=0 \Leftrightarrow (|z-2|-1)(|z-2|+2)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-2|=1$ ή $|z-2|=-2$ (Απορρίπτεται). Άρα $|z-2|=1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνας $\rho=1$.

Ισχύει: $|z|=|z-2+2|\le|z-2|+2=3$

B2.

Επειδή z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $\omega^2+\beta\omega+\gamma=0$ ισχύει: $z_1=\overline{z_2} \Leftrightarrow x_1+y_1 i = x_2 - y_2 i \Rightarrow x_1 = x_2$ και $y_1=-y_2$

Όμως $\left|\text{Im}\ z_1 - \text{Im}\ z_2\right| = 2 \Leftrightarrow |y_1-y_2|=2 \overset{y_1=-y_2}{\Leftrightarrow} |2y_1|=2 \Leftrightarrow y_1=\pm 1$

Όμως $|z_1-2|=1 \Leftrightarrow \sqrt{(x_1-2)^2+y_1^2}=1 \Leftrightarrow (x_1-2)^2+y_1^2=1 \overset{y_1=\pm 1}{\Leftrightarrow} (x_1-2)^2=0 \Leftrightarrow x_1=2$

Άρα $z_1=2+i$ και $z_2=2-i$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$z_1+z_2=-\beta \Leftrightarrow 4=-\beta \Leftrightarrow \beta=-4$

$z_1.z_2=\dfrac{\gamma}{1} \Leftrightarrow 5=\gamma$

B3. Έστω $|\nu|\geq 4$. Έχουμε $\nu^3+\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0=0 \Leftrightarrow \nu^3=-\alpha_2\nu^2-a_1\nu-\alpha_0$. Άρα $|\nu|^3=\left|-\alpha_2\nu^2-\alpha_1\nu-\alpha_0\right|=\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|$. Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι

$|\nu|^3=\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right| \leq \left|\alpha_2\nu^2\right|+|\alpha_1\nu|+|\alpha_0|=|\alpha_2||\nu_2|+|\alpha_1|.|\nu|+|\alpha_0|$

Από B1 είναι $|\alpha_0|\leq 3$, $|\alpha_1|\leq 3$, $|\alpha_2|\leq 3$, άρα $\left|\alpha_2\nu^2+\alpha_1\nu+\alpha_0\right|\leq 3|\nu|^2+3|\nu|+3=3\left(|\nu|^2+|\nu+1|\right)$. Η τελευταία γράφεται

$|\nu|^3 \leq 3\dfrac{|\nu|^3-1}{|\nu|-1}$ (είναι $|\nu|-1>0$ εφόσον $|\nu|\geq 4$) $\Leftrightarrow |\nu|^3\left(|\nu|-1\right)\leq 3\left(|\nu|^3-1\right) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |\nu|^4 \leq 4|\nu|^3-3$. Όμως $4|\nu|^3-3<4|\nu|^3$. Άρα $|\nu|^4\leq 4|\nu|^3 \Leftrightarrow |\nu|<4$ που είναι άτοπο. Άρα $|\nu|<4$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

$2\left(f(x)+x\right).\left(f'(x)+1\right)=2x \Leftrightarrow \left((f(x)+x)^2\right)'=(x^2)'$ για κάθε $x\in R$. Από συνέπειες Θ.Μ.Τ ισχύει $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+c$. Για $x=0$ τότε $f(0)=c \Leftrightarrow c=1$. Άρα $\left(f(x)+x\right)^2=x^2+1$ (1)

Θεωρώ $h(x)=f(x)+x$ η οποία είναι συνεχής στο IR ως άθροισμα συνεχών. Άρα $h^2(x)=x^2+1>0 \Rightarrow h(x)\neq 0$ για κάθε $x\in R$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως, $h(0)=f(0)=1\succ 0 \Rightarrow h(x)\succ 0$. Από τη σχέση (1) ισχύει

$$h^2(x)=x^2+1 \overset{h(x)>0}{\Rightarrow} h(x)=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)+x=\sqrt{x^2+1} \Leftrightarrow f(x)=\sqrt{x^2+1}-x$$

Γ2. Θα αποδείξω ότι: $f(x)>0 \quad \forall x\in IR$

- Αν $x\leq 0$, προφανώς $f(x)>0$
- Αν $x>0$, $\sqrt{x^2+1}>x \Leftrightarrow x^2+1>x^2 \Leftrightarrow 1>0$ που ισχύει. Άρα $f(x)>0 \quad \forall x\in IR$

Για το πεδίο ορισμού της fog ισχύει:

$$A_{fog}=\{x\in A_g \,/\, g(x)\in A_f\}=\{x\in IR \,/\, g(x)\in IR\}=IR.$$

Έχουμε:

$$f'(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}-1=\frac{x-\sqrt{x^2+1}}{\sqrt{x^2+1}}=\frac{-f(x)}{\sqrt{x^2+1}}<0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο R οπότε και 1-1. Ισχύει:

$$f(g(x))=1 \Leftrightarrow f(g(x))=f(0) \overset{f_{1-1}}{\Leftrightarrow} g(x)=0 \Leftrightarrow x^3+\frac{3x^2}{2}-1=0 \Leftrightarrow g'(x)=3x^2+3x=0 \Leftrightarrow 3x(x+1)=0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x=0$ ή $x=-1$. Το πρόσημο της g’ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:

x	$-\infty$ $\qquad$ -1	0	$+\infty$
$f'(x)$	+ $\quad$ 0	- $\quad$ 0	+
$f(x)$	↗	↘	↗

$g((-\infty,-1]) \overset{g\nearrow}{=} (\lim\limits_{x\to-\infty} g(x),\ g(-1)] = (-\infty,-\frac{1}{2}]$. Άρα η g(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο $(-\infty,1)$.

$g((-1,0)) \overset{g\searrow}{=} (\lim\limits_{x\to 0^-} g(x),\ \lim\limits_{x\to -1^+} g(x)) = (-1,-\frac{1}{2})$. Άρα g(x) = 0 δεν έχει ρίζα στο $(-1,0)$

$g([0,+\infty)) \overset{g\nearrow}{=} [g(0), \lim\limits_{x\to+\infty} g(x)) = [-1,+\infty)$. Επειδή η τιμή $0 \in g([0,+\infty))$ η $g(x)=0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0,+\infty)$ καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x)=\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt - f\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x$.

Η f είναι συνεχής στο R και $0, x-\dfrac{\pi}{4} \in R$. Άρα η συνάρτηση $\displaystyle\int_{x-\pi/4}^{0} f(t)dt$ είναι παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Η συνάρτηση $f\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών άρα φ(x) είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι

- συνεχής στο $\left[0,\dfrac{\pi}{4}\right]$
- $\varphi\;\; 0 \;= \displaystyle\int_{-\frac{\pi}{4}}^{0} f\;\; t\; dt > 0$ διότι $f\;\; t\; > 0$

$\varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = -f\;\; 0\; = -1 < 0$ διότι $f\;\; t\; > 0$

Άρα $\varphi\;\; 0\; \cdot \varphi\left(\dfrac{\pi}{4}\right) < 0$. Επομένως από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0,\dfrac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο ώστε $\varphi\;\; x_0\; = 0 \Leftrightarrow \displaystyle\int_{x_0-\pi/4}^{0} f(t)dt = f\left(x_0-\dfrac{\pi}{4}\right)\varepsilon\varphi x_0$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\lim_{h\to 0} = \frac{f(1+5h)-f(1-h)}{h} = \lim_{h\to 0} = \frac{f(1+5h)-f(1)+f(1)-f(1-h)}{h} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+5h)-f(1)}{h} - \lim_{h\to 0}\frac{f(1-h)-f(1)}{h} = \ell_1 - \ell_2 = 6f'(1) \quad \text{σχέση (1)}$$

για το ℓ_1 θέτω u=5h. Αν $h \to 0 \Leftrightarrow u \to 0$

$$\ell_1 = \lim_{u\to 0}\frac{f(1+u)-f(1)}{\frac{u}{5}} = 5\cdot f'(1)$$

για το ℓ_2 θέτω t=-h. Αν $h \to 0 \Leftrightarrow t \to 0$

$$\ell_2 = \lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{-t} = -\lim_{t\to 0}\frac{f(1+t)-f(1)}{t} = -f'(1)$$

Άρα $f'(1) = 0$.

για κάθε $0 < x < 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για κάθε $x > 1 \overset{f'\uparrow}{\Leftrightarrow} f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0		1		$+\infty$
f'		$-$		$+$	
f		$\searrow$		$\nearrow$	

min=f(1)

Δ2.

Η συνάρτηση $h(t)=\dfrac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η f(t) είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη) στο $(1,+\infty)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη
με:

$$g'(x)=\frac{f(x)-1}{x-1}>0$$ επειδή για κάθε $x>1\overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x)>f(1)=1\Rightarrow f(x)-1>0$ και $x-1>0$. Άρα $g\uparrow$

Έστω $h(x)=\int_{x+5}^{x+6} g(u)du=-\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du+\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du$ με $x>1$

η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων γιατί η g(u) συνεχής στο $(1,+\infty)$ και $\alpha\in(1,+\infty)$, $x+6, x+5\in(1,+\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+5} g(u)du$, $\int_{\alpha}^{x+6} g(u)du$ είναι παραγωγίσιμες.

$h'(x)=g(x+6)(x+6)'-g(x+5)(x+5)'= g(x+6)-g(x+5)>0$ γιατί

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1,+\infty)$ και $x+6 > x+5$ άρα $g(x+6) > g(x+5)$. Οπότε η h

είναι γνησίως αύξουσα.
Ισχύει:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u)du>\int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u)du\Leftrightarrow h(8x^2)>h(2x^4)\overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow}8x^2>2x^4\Leftrightarrow 4x^2>x^4\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4-4x^2<0\Leftrightarrow x^2(x^2-4)<0\underset{x^2>0}{\Leftrightarrow}x^2-4<0\Leftrightarrow x^2<4\Leftrightarrow |x|<2\Leftrightarrow -2<x<2$$

Όμως για $x=0$ η δοσμένη ανίσωση δεν ισχύει. Άρα $-2<x<0$, $0<x<2$.

Δ3. Ισχύει $g(x)=\int_{\alpha}^{x}\dfrac{f(t)-1}{t-1}dt,\ x\in(1,+\infty)$ και $\alpha>1$

η g είναι παραγωγίσιμη από Δ2 ερώτημα με $g'(x)=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$

η g΄ είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x)=\frac{f'(x)(x-1)-(f(x)-1)}{(x-1)^2}\quad(1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1,x]$, $x>1$.
η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1,x]\subseteq(0,+\infty)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(1,x)$ ώστε να ισχύει $f'(\xi)=\dfrac{f(x)-f(1)}{x-1}=\dfrac{f(x)-1}{x-1}$ (2) για το ξ ισχύει $1<\xi<x$ και η f΄ είναι γνησίως αύξουσα.
Άρα

$$f'(1) < f'(\xi) < f'(x) \overset{(2)}{\Leftrightarrow} 0 < \frac{f(x)-1}{x-1} < f'(x) \Leftrightarrow f'(x)(x-1)-(f(x)-1) > 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} g''(x) > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο με $x_0=\alpha$ είναι

ε: $y-g(\alpha)=g'(\alpha)(x-\alpha)$

όμως $g(\alpha)=\int_{\alpha}^{\alpha}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=0$ και $g'(\alpha)=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}$

Άρα ε: $y=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$

όμως η g είναι κυρτή οπότε ισχύει:

$g(x) \geq \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$ για κάθε x>1 και η ισότητα ισχύει μόνο για x=α. Άρα η εξίσωση $g(x) = \frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}\cdot(x-\alpha)$ έχει ακριβώς μία λύση τη x=α.

Όμως $\int_{\alpha}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=\frac{f(\alpha)-1}{\alpha-1}(x-\alpha)$

$$(a-1)\int_{a}^{x}\frac{f(t)-1}{t-1}dt=(f(a)-1)(x-a)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.