

ΑΡΧΗ 1ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:

**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)**

ΘΕΜΑ Α

A1. Έστω f μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[α, β]$. Αν G είναι μια παράγουσα της f στο $[α, β]$, τότε να αποδείξετε ότι:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt = G(\beta) - G(\alpha)$$

Μονάδες 7

A2. Να διατυπώσετε το Θεώρημα Μέσης Τιμής του Διαφορικού Λογισμού (Θ.Μ.Τ.)

Μονάδες 4

A3. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα κλειστό διάστημα $[α, β]$ του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

A4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho$, $\rho > 0$ παριστάνει τον κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ^2 , όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

β) Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) < 0$, τότε $f(x) < 0$ κοντά στο x_0

γ) Ισχύει ότι: $|\eta \mu x| \leq |x|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$

δ) Ισχύει ότι: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sigma \nu x - 1}{x} = 1$

ε) Μια συνεχής συνάρτηση f διατηρεί πρόσημο σε καθένα από τα διαστήματα στα οποία οι διαδοχικές ρίζες της f χωρίζουν το πεδίο ορισμού της.

Μονάδες 10

ΤΕΛΟΣ 1ΗΣ ΑΠΟ 4 ΣΕΛΙΔΕΣ

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$(z-2)(\bar{z}-2)+|z-2|=2$$

- B1.** Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z , είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho=1$ (μονάδες 5)

Στη συνέχεια, για κάθε μιγαδικό z που ανήκει στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο, να αποδείξετε ότι $|z| \leq 3$ (μονάδες 3)

Μονάδες 8

- B2.** Αν οι μιγαδικοί αριθμοί z_1, z_2 που ανήκουν στον παραπάνω γεωμετρικό τόπο είναι ρίζες της εξίσωσης $w^2 + \beta w + \gamma = 0$, με w μιγαδικό αριθμό, $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$, και

$$|\operatorname{Im}(z_1) - \operatorname{Im}(z_2)| = 2$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$\beta = -4 \quad \text{και} \quad \gamma = 5$$

Μονάδες 9

- B3.** Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2$ οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **B1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0$$

τότε να αποδείξετε ότι:

$$|v| < 4$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, με f παραγωγίσιμη τέτοιες ώστε:

- $(f(x) + x)(f'(x) + 1) = x$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(0) = 1$ και
- $g(x) = x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1$

ΑΡΧΗ 3ΗΣ ΣΕΛΙΔΑΣ - Γ΄ ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x, \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης

$$f(g(x)) = 1$$

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_{x_0 - \frac{\pi}{4}}^0 f(t) dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Έστω $f: (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ μια παραγωγίσιμη συνάρτηση για την οποία ισχύουν:

- Η f' είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$
- $f(1) = 1$
- $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} = 0$

Θεωρούμε επίσης τη συνάρτηση

$$g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt, \quad x \in (1, +\infty) \text{ και } \alpha > 1$$

Να αποδείξετε ότι:

Δ1. $f'(1) = 0$ (μονάδες 4), καθώς επίσης ότι η f παρουσιάζει ελάχιστο στο $x_0 = 1$ (μονάδες 2).

Μονάδες 6

Δ2. η g είναι γνησίως αύξουσα (μονάδες 3), και στη συνέχεια, να λύσετε την ανίσωση στο \mathbb{R}

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \quad (\text{μονάδες 6})$$

Μονάδες 9

Δ3. η g είναι κυρτή, καθώς επίσης ότι η εξίσωση

$$(\alpha - 1) \int_{\alpha}^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(\alpha) - 1)(x - \alpha), \quad x > 1$$

έχει ακριβώς μια λύση.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. Στο εξώφυλλο του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. Στην αρχή των απαντήσεών σας να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. Να μην αντιγράψετε τα θέματα στο τετράδιο και να μην γράψετε πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε στο τετράδιό σας σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ



ΠΑΝΕΛΛΗΝΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ' ΤΑΞΗΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ
ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

A1. Θεωρία σχολικό σελ.335

A2. Θεωρία σχολικό σελ.246

A3. Θεωρία σχολικό σελ.222

A4. α. Λάθος

β. Σωστό

γ. Σωστό

δ. Λάθος

ε. Σωστό

ΘΕΜΑ Β

B1.

$$z-2 \overline{z-2} + |z-2| = 2 \Leftrightarrow |z-2|^2 + |z-2| - 2 = 0 \Leftrightarrow |z-2| - 1 \quad |z-2| + 2 = 0 \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow |z-2| = 1$ ή $|z-2| = -2$ (Απορρίπτεται). Άρα $|z-2| = 1$, οπότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών z είναι κύκλος με κέντρο $K(2,0)$ και ακτίνας $\rho = 1$.

Ισχύει: $|z| = |z-2+2| \leq |z-2| + 2 = 3$

B2.

Επειδή z_1, z_2 ρίζες της εξίσωσης $\omega^2 + \beta\omega + \gamma = 0$ ισχύει:

$$z_1 = \overline{z_2} \Leftrightarrow x_1 + y_1i = x_2 - y_2i \Rightarrow x_1 = x_2 \text{ και } y_1 = -y_2$$

$$\text{Όμως } |\operatorname{Im} z_1 - \operatorname{Im} z_2| = 2 \Leftrightarrow |y_1 - y_2| = 2 \stackrel{y_1 = -y_2}{\Leftrightarrow} |2y_1| = 2 \Leftrightarrow y_1 = \pm 1$$

$$\text{Όμως } |z_1 - 2| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x_1 - 2^2 + y_1^2} = 1 \Leftrightarrow x_1 - 2^2 + y_1^2 = 1 \stackrel{y_1 = \pm 1}{\Leftrightarrow} x_1 - 2^2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 2$$

$$\text{Άρα } z_1 = 2 + i \text{ και } z_2 = 2 - i$$

Από τους τύπους του Vieta έχουμε:

$$z_1 + z_2 = -\beta \Leftrightarrow 4 = -\beta \Leftrightarrow \beta = -4$$

$$z_1 \cdot z_2 = \frac{\gamma}{1} \Leftrightarrow 5 = \gamma$$

B3. Έστω $|v| \geq 4$. Έχουμε $v^3 + \alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0 = 0 \Leftrightarrow v^3 = -\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0$. Άρα

$$|v|^3 = |-\alpha_2 v^2 - \alpha_1 v - \alpha_0| = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0|. \text{ Λόγω της τριγωνικής ανισότητας είναι}$$

$$|v|^3 = |\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq |\alpha_2 v^2| + |\alpha_1 v| + |\alpha_0| = |\alpha_2| |v|^2 + |\alpha_1| |v| + |\alpha_0|$$

Από B1 είναι $|\alpha_0| \leq 3, |\alpha_1| \leq 3, |\alpha_2| \leq 3$, άρα

$$|\alpha_2 v^2 + \alpha_1 v + \alpha_0| \leq 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3(|v|^2 + |v| + 1). \text{ Η τελευταία γράφεται}$$

$$|v|^3 \leq 3 \frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \text{ (είναι } |v| - 1 > 0 \text{ εφόσον } |v| \geq 4) \Leftrightarrow |v|^3 |v| - 1 \leq 3 |v|^3 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow |v|^4 \leq 4|v|^3 - 3. \text{ Όμως } 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3. \text{ Άρα } |v|^4 \leq 4|v|^3 \Leftrightarrow |v| < 4 \text{ που είναι άτοπο. Άρα } |v| < 4$$

ΘΕΜΑ Γ**Γ1.**

$2f(x) + x \cdot f'(x) + 1 = 2x \Leftrightarrow (f(x) + x)^2 = (x^2)'$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Από συνέπειες

Θ.Μ.Τ ισχύει $f(x) + x^2 = x^2 + c$. Για $x = 0$ τότε $f(0) = c \Leftrightarrow c = 1$. Άρα

$$f(x) + x^2 = x^2 + 1 \quad (1)$$

Θεωρώ $h(x) = f(x) + x$ η οποία είναι συνεχής στο \mathbb{R} ως άθροισμα συνεχών. Άρα $h^2(x) = x^2 + 1 > 0 \Rightarrow h(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και επειδή είναι συνεχής, διατηρεί σταθερό πρόσημο. Όμως, $h(0) = f(0) = 1 > 0 \Rightarrow h(x) > 0$. Από τη σχέση (1) ισχύει

$$h^2(x) = x^2 + 1 \stackrel{h(x)>0}{\Rightarrow} h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) + x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow f(x) = \sqrt{x^2 + 1} - x$$

Γ2. Θα αποδείξω ότι: $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

- Αν $x \leq 0$, προφανώς $f(x) > 0$
- Αν $x > 0$, $\sqrt{x^2 + 1} > x \Leftrightarrow x^2 + 1 > x^2 \Leftrightarrow 1 > 0$ που ισχύει. Άρα $f(x) > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Για το πεδίο ορισμού της $f \circ g$ ισχύει:

$$A_{f \circ g} = x \in A_g / g(x) \in A_f = x \in \mathbb{R} / g(x) \in \mathbb{R} = \mathbb{R}.$$

Έχουμε:

$$f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 1}} < 0.$$

Άρα η f είναι γνησίως φθίνουσα στο \mathbb{R} οπότε και 1-1. Ισχύει:

$$f \circ g(x) = 1 \Leftrightarrow f \circ g(x) = f(0) \stackrel{f_{1-1}}{\Leftrightarrow} g(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 + \frac{3x^2}{2} - 1 = 0 \Leftrightarrow g'(x) = 3x^2 + 3x = 0 \Leftrightarrow 3x(x+1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -1. \text{ Το πρόσημο της } g' \text{ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα:}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$			
f' x		+	0	-	0	+	
f x			↗		↘		↗

$g \left(-\infty, -1 \right] \stackrel{g \nearrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x), g(-1) \right) = \left(-\infty, -\frac{1}{2} \right]$. Άρα η $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $-\infty, -1$.

$g \left(-1, 0 \right) \stackrel{g \searrow}{=} \left(\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x), \lim_{x \rightarrow -1^+} g(x) \right) = \left(-1, -\frac{1}{2} \right)$. Άρα $g(x) = 0$ δεν έχει ρίζα στο $-1, 0$.

$g \left[0, +\infty \right) \stackrel{g \nearrow}{=} \left[g(0), \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) \right) = \left[-1, +\infty \right)$. Επειδή η τιμή $0 \in g \left[0, +\infty \right)$ η $g(x) = 0$ έχει ακριβώς μια ρίζα στο $[0, +\infty)$ καθώς η g είναι γνησίως αύξουσα.

Γ3. Θεωρώ συνάρτηση $\varphi(x) = \int_{x-\pi/4}^0 f(t) dt - f\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x$.

Η f είναι συνεχής στο \mathbb{R} και $0, x - \frac{\pi}{4} \in \mathbb{R}$. Άρα η συνάρτηση $\int_{x-\pi/4}^0 f(t)dt$ είναι

παραγωγίσιμη οπότε και συνεχής. Η συνάρτηση $f\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών άρα $\varphi(x)$ είναι συνεχής ως διαφορά συνεχών.

Επομένως η συνάρτηση φ είναι

- συνεχής στο $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$
- $\varphi(0) = \int_{-\pi/4}^0 f(t) dt > 0$ διότι $f(t) > 0$
- $\varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = -f(0) = -1 < 0$ διότι $f(t) > 0$

Άρα $\varphi(0) \cdot \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) < 0$. Επομένως από το θ. Bolzano υπάρχει τουλάχιστον ένα

$$x_0 \in \left(0, \frac{\pi}{4}\right) \text{ τέτοιο ώστε } \varphi(x_0) = 0 \Leftrightarrow \int_{x_0-\pi/4}^0 f(t)dt = f\left(x_0 - \frac{\pi}{4}\right) \varepsilon \varphi x_0.$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1-h)}{h} &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1) + f(1) - f(1-h)}{h} = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+5h) - f(1)}{h} - \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1-h) - f(1)}{h} = l_1 - l_2 = 6f'(1) \quad \text{σχέση (1)} \end{aligned}$$

για το l_1 θέτω $u=5h$. Αν $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow u \rightarrow 0$

$$l_1 = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{f(1+u) - f(1)}{\frac{u}{5}} = 5 \cdot f'(1)$$

για το l_2 θέτω $t=-h$. Αν $h \rightarrow 0 \Leftrightarrow t \rightarrow 0$

$$l_2 = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{-t} = -\lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1+t) - f(1)}{t} = -f'(1)$$

Άρα $f'(1) = 0$.

για κάθε $0 < x < 1 \Leftrightarrow f'(x) < f'(1) \Leftrightarrow f'(x) < 0$

για κάθε $x > 1 \Leftrightarrow f'(x) > f'(1) \Leftrightarrow f'(x) > 0$

x	0	1	+∞
f'		-	+
f		↘	↗

min=f(1)

Δ2.

Η συνάρτηση $h(t) = \frac{f(t)-1}{t-1}$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών συναρτήσεων (η $f(t)$ είναι συνεχής ως παραγωγίσιμη) στο $(1, +\infty)$ και $a \in (1, +\infty)$. Άρα η g είναι παραγωγίσιμη με:

$$g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1} > 0 \text{ επειδή για κάθε } x > 1 \Rightarrow f(x) > f(1) = 1 \Rightarrow f(x)-1 > 0 \text{ και } x-1 > 0. \text{ Άρα } g \uparrow$$

$$\text{Έστω } h(x) = \int_{x+5}^{x+6} g(u) du = - \int_{\alpha}^{x+5} g(u) du + \int_{\alpha}^{x+6} g(u) du \text{ με } x > 1$$

η h είναι παραγωγίσιμη ως διαφορά παραγωγίσιμων γιατί η $g(u)$ συνεχής στο $(1, +\infty)$ και $a \in (1, +\infty)$, $x+6, x+5 \in (1, +\infty)$

Άρα οι συναρτήσεις $\int_{\alpha}^{x+5} g(u) du$, $\int_{\alpha}^{x+6} g(u) du$ είναι παραγωγίσιμες.

$$h'(x) = g(x+6)(x+6)' - g(x+5)(x+5)' = g(x+6) - g(x+5) > 0 \text{ γιατί}$$

η g είναι γνησίως αύξουσα στο $(1, +\infty)$ και $x+6 > x+5$ άρα $g(x+6) > g(x+5)$. Οπότε η h είναι γνησίως αύξουσα.

Ισχύει:

$$\int_{8x^2+5}^{8x^2+6} g(u) du > \int_{2x^4+5}^{2x^4+6} g(u) du \Leftrightarrow h(8x^2) > h(2x^4) \Leftrightarrow 8x^2 > 2x^4 \Leftrightarrow 4x^2 > x^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 < 0 \Leftrightarrow x^2(x^2 - 4) < 0 \Leftrightarrow x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow x^2 < 4 \Leftrightarrow |x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2$$

Όμως για $x=0$ η δοσμένη ανίσωση δεν ισχύει. Άρα $-2 < x < 0$, $0 < x < 2$.

Δ3. Ισχύει $g(x) = \int_{\alpha}^x \frac{f(t)-1}{t-1} dt$, $x \in (1, +\infty)$ και $a > 1$

η g είναι παραγωγίσιμη από Δ2 ερώτημα με $g'(x) = \frac{f(x)-1}{x-1}$

η g' είναι παραγωγίσιμη ως πηλίκο παραγωγίσιμων συναρτήσεων με

$$g''(x) = \frac{f'(x)(x-1) - (f(x)-1)}{(x-1)^2} \quad (1)$$

Εφαρμόζω Θ.Μ.Τ. για την f στο $[1, x]$, $x > 1$.

η f είναι παραγωγίσιμη στο $[1, x] \subseteq (0, +\infty)$. Άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1, x)$

ώστε να ισχύει $f'(\xi) = \frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \frac{f(x)-1}{x-1}$ (2) για το ξ ισχύει $1 < \xi < x$ και η f' είναι

γνησίως αύξουσα.

Άρα

$$f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x) < f'(x_0) \Leftrightarrow 0 < \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} < f'(x_0) \Leftrightarrow f'(x)(x - x_0) - (f(x) - f(x_0)) > 0 \Leftrightarrow g'(x) > 0$$

Άρα η g είναι κυρτή.

Η εξίσωση της εφαπτομένης της g στο σημείο με $x_0 = a$ είναι

$$y - g(a) = g'(a)(x - a)$$

$$\text{όμως } g(a) = \int_a^a \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = 0 \text{ και } g'(a) = \frac{f(a) - 1}{a - 1}$$

$$\text{Άρα } y = \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a)$$

όμως η g είναι κυρτή οπότε ισχύει:

$$g(x) \geq \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a) \text{ για κάθε } x > 1 \text{ και η ισότητα ισχύει μόνο για } x = a. \text{ Άρα η}$$

$$\text{εξίσωση } g(x) = \frac{f(a) - 1}{a - 1} \cdot (x - a) \text{ έχει ακριβώς μία λύση τη } x = a.$$

$$\text{Όμως } \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = \frac{f(a) - 1}{a - 1} (x - a)$$

$$(a - 1) \int_a^x \frac{f(t) - 1}{t - 1} dt = (f(a) - 1)(x - a)$$

Επομένως η ζητούμενη εξίσωση έχει ακριβώς μια λύση.