ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0, να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο αυτό.

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Fermat.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Ποια σημεία λέγονται *κρίσιμα σημεία* της f;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για οποιονδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $|\bar{z}| = |-z|$

(μονάδες 2)

β) Αν μια συνάρτηση f είναι 1–1 στο πεδίο ορισμού της, τότε υπάρχουν σημεία της γραφικής παράστασης της f με την ίδια τεταγμένη.

(μονάδες 2)

γ) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = -\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\left(-f(x)\right) = +\infty$

(μονάδες 2)

δ) Για δύο οποιεσδήποτε συναρτήσεις f, g παραγωγίσιμες στο x_0 ισχύει:

$$(f\,g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)$$

(μονάδες 2)

ε) Αν μια συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δεν μηδενίζεται σε αυτό, τότε η f διατηρεί πρόσημο στο διάστημα Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους η εξίσωση

$$2x^2 - |w-4-3i|x = -2|z|, \quad x \in \mathbb{R}$$

έχει μια διπλή ρίζα, την $x = 1$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των z στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho_1 = 1$, καθώς επίσης ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των w στο μιγαδικό επίπεδο είναι κύκλος με κέντρο Κ(4,3) και ακτίνα $\rho_2 = 4$

Μονάδες 8

Β2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.

Μονάδες 5

Β3. Για τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, w του ερωτήματος Β1 να αποδείξετε ότι:

$$|z-w| \le 10 \quad \text{και} \quad |z+w| \le 10$$

Μονάδες 6

Β4. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z του ερωτήματος Β1 να βρείτε εκείνους, για τους οποίους ισχύει:

$$\left|2z^2 - 3z - 2z\bar{z}\right| = 5$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $2xf(x) + x^2(f'(x)-3) = -f'(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$
- $f(1) = \dfrac{1}{2}$

Γ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)=\frac{x^3}{x^2+1}, \quad x\in\mathbb{R}$$

και στη συνέχεια ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$

Μονάδες 6

Γ2. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f του ερωτήματος Γ1.

Μονάδες 4

Γ3. Να λύσετε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών την ανίσωση:

$$f\left(5(x^2+1)^3-8\right)\le f\left(8(x^2+1)^2\right)$$

Μονάδες 7

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(0,\ 1)$ τέτοιο, ώστε:

$$\int_0^{\xi^3-\xi} f(t)\,dt=-\xi\left(3\xi^2-1\right) f\left(\xi^3-\xi\right)$$

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με συνεχή δεύτερη παράγωγο στο $[0,+\infty)$, για την οποία ισχύουν:

- $f(x)=x+\displaystyle\int_1^x\left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2-1}{f(t)}\,dt\right)du$ για κάθε $x>0$
- $f(x)\,f'(x)\neq 0$ για κάθε $x>0$ και $f(0)=0$

Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις:

$$g(x)=\frac{f'(x)}{f(x)} \quad \text{με } x>0 \quad \text{και} \quad h(x)=\left(f'(x)\right)^3 \quad \text{με } x\ge 0$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι:

$$f(x)\,f''(x)+1=\left(f'(x)\right)^2 \quad \text{για κάθε } x>0$$

Μονάδες 4

Δ2. **α.** Να βρείτε το πρόσημο των συναρτήσεων f και f' στο $(0,+\infty)$

(μονάδες 4)

β. Να αποδείξετε ότι $f'(0)=1$

(μονάδες 3)

Μονάδες 7

Δ3. Δεδομένου ότι η συνάρτηση g είναι κυρτή στο $(0,+\infty)$, να αποδείξετε ότι:

α. $g(x)\geq 2-x$ για κάθε $x\in(0,+\infty)$

(μονάδες 2)

β. $\displaystyle\int_0^1 (2-x)\,f(x)\,dx<1$

(μονάδες 4)

Μονάδες 6

Δ4. Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης h, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$

Μονάδες 8

<u>ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)</u>

1. <u>Στο εξώφυλλο</u> του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω</u> να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. <u>Στην αρχή των απαντήσεών σας</u> να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. <u>Να μην αντιγράψετε</u> τα θέματα στο τετράδιο και **<u>να μην γράψετε</u>** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. <u>Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση.</u> Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.

3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, και μόνο για πίνακες, διαγράμματα κλπ.

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.

6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΕΜΠΤΗ 13 ΙΟΥΝΙΟΥ 2013
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 217
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 260
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 261
Α4. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. Η εξίσωση γίνεται : $2x^2 - |w-4-3i|\cdot x + 2|z| = 0$

- Πρέπει $\Delta = 0 \Leftrightarrow \left(-|w-4-3i|\right)^2 - 4\cdot 2\cdot 2|z| = 0 \Leftrightarrow$

  $|w-4-3i|^2 = 16|z| \Leftrightarrow |z| = \dfrac{|w-4-3i|^2}{16}$ **(1)**

- $1^{ος}$ **τρόπος** Το 1 είναι διπλή ρίζα άρα $\dfrac{-\beta}{2\alpha} = \dfrac{|w-4-3i|}{4} = 1$

  $\Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

- $2^{ος}$ **τρόπος** Το 1 είναι ρίζα της εξίσωσης άρα

  $2 - |w-4-3i| + 2|z| = 0 \overset{(1)}{\Leftrightarrow} 2 - |w-4-3i| + 2\dfrac{|w-4-3i|^2}{16} = 0$

  $\overset{\cdot 8}{\Leftrightarrow} 16 - 8|w-4-3i| + |w-4-3i|^2 = 0 \Leftrightarrow$

  $\left(|w-4-3i| - 4\right)^2 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| - 4 = 0 \Leftrightarrow |w-4-3i| = 4$ **(2)**

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του w είναι

  ο κύκλος C_2 με κέντρο $K(4, 3)$ και ακτίνα $\rho_2 = 4$

- **(1)** $\overset{(2)}{\Rightarrow} |z| = \dfrac{4^2}{16} \Leftrightarrow |z| = 1$ **Κ Σ**

  Επομένως ο γ.τ. των εικόνων του z είναι

  ο κύκλος C_1 με κέντρο $O(0, 0)$ και ακτίνα $\rho_1 = 1$

B2. $(OK) = \sqrt{(4-0)^2 + (3-0)^2}$

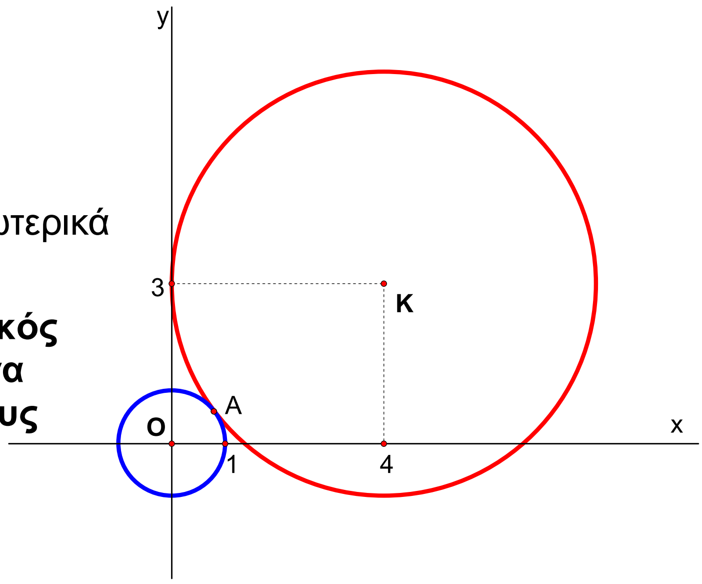
$= \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Είναι $(OK) = \rho_1 + \rho_2$,

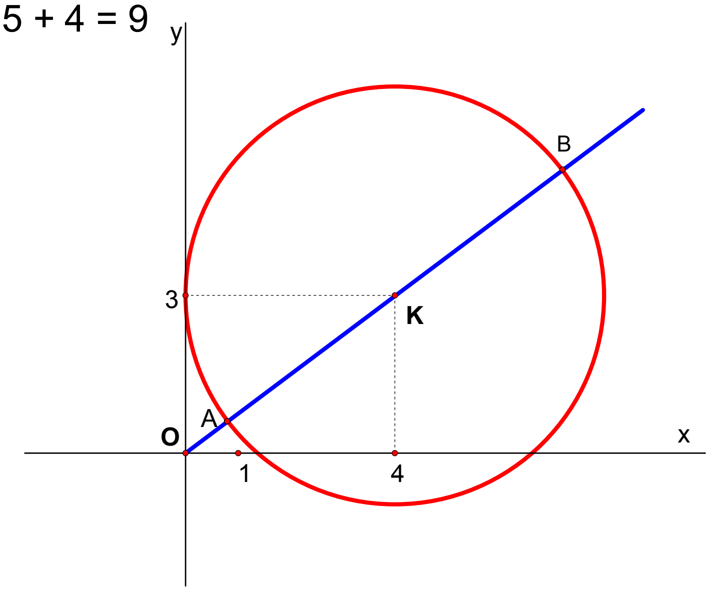
άρα οι κύκλοι εφάπτονται εξωτερικά

σε ένα σημείο A (σχήμα)

Επομένως **υπάρχει μοναδικός μιγαδικός αριθμός, η εικόνα του οποίου ανήκει και στους δύο παραπάνω γεωμετρικούς τόπους.**



B3. $|w|_{max} = (OB) = (OK) + \rho_2 = 5 + 4 = 9$



$|z - w| \leq |z| + |-w| \quad \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + |w| \quad \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + |w|_{max} \quad \Leftrightarrow$

$|z - w| \leq 1 + 9 \quad \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z - w| \leq 10}$

$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + |w| \quad \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + |w|_{max} \quad \Leftrightarrow$

$|z + w| \leq 1 + 9 \quad \Leftrightarrow$

$\mathbf{|z + w| \leq 10}$

Β4. • $\left| 2z^2 - 3z - 2z\bar{z} \right| = 5 \Leftrightarrow \left| z\cdot(2z - 3 - 2\bar{z}) \right| = 5 \Leftrightarrow$

$\left| z \right|\cdot\left| 2z - 2\bar{z} - 3 \right| = 5 \overset{|z|=1}{\Leftrightarrow} \left| 2(z - \bar{z}) - 3 \right| = 5 \Leftrightarrow$

$\left| 2\cdot 2\mathrm{Im}(z)\cdot i - 3 \right| = 5 \Leftrightarrow \left| -3 + 4\mathrm{Im}(z)\cdot i \right| = 5$

$\sqrt{(-3)^2 + \left[4\mathrm{Im}(z)\right]^2} = 5 \Leftrightarrow 9 + 16\mathrm{Im}^2(z) = 25 \Leftrightarrow$

$16\mathrm{Im}^2(z) = 16 \Leftrightarrow \mathrm{Im}^2(z) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = \pm 1$

• $\left| z \right| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{\mathrm{Re}^2(z) + \mathrm{Im}^2(z)} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{Re}^2(z) + 1 = 1 \Leftrightarrow$

$\mathrm{Re}^2(z) = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 0$

Επομένως $\mathbf{z = \pm i}$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι : $2xf(x) + x^2[f'(x) - 3] = -f'(x) \Leftrightarrow$

$\left(x^2\right)' f(x) + x^2 f'(x) - 3x^2 + f'(x) = 0 \Leftrightarrow \left[x^2 f(x) - x^3 + f(x)\right]' = 0$

από συνέπειες Θ.Μ.Τ. είναι $x^2 f(x) - x^3 + f(x) = c$

Για $x = 1$ έχω : $f(1) - 1 + f(1) = c \Leftrightarrow c = 0$

Επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$ είναι :

$x^2 f(x) - x^3 + f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 f(x) + f(x) = x^3 \Leftrightarrow$

$(x^2 + 1)f(x) = x^3 \Leftrightarrow \mathbf{f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 + 1}}$

$$f'(x) = \left(\frac{x^3}{x^2 + 1}\right)' = \frac{3x^2\cdot(x^2 + 1) - (x^3)\cdot 2x}{(x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{3x^4 + 3x^2 - 2x^4}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^4 + 3x^2}{(x^2 + 1)^2} = \frac{x^2\cdot(x^2 + 3)}{(x^2 + 1)^2} \geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

άρα **η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR**

Γ2. Η f είναι συνεχής στο IR, άρα δεν έχει κατακόρυφες ασύμπτωτες

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to-\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to-\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$**

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x^3}{x^2+1}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3+x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{x^3} = 1 = \lambda$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left[f(x)-\lambda x\right] = \lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^3}{x^2+1} - x\right) = \lim_{x\to+\infty}\frac{-x}{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty}\frac{-\cancel{x}}{x^{\cancel{2}}} = 0 = \beta$$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = x$**

Γ3. $f\left(5(x^2+1)^3 - 8\right) \le f\left(8(x^2+1)^2\right) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$5(x^2+1)^3 - 8 \le 8(x^2+1)^2 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8(x^2+1)^2 + 8 \Leftrightarrow$

$5(x^2+1)^3 \le 8\left[(x^2+1)^2 + 1\right] \Leftrightarrow$

$\dfrac{(x^2+1)^3}{(x^2+1)^2+1} \le \dfrac{8}{5} \Leftrightarrow$

$f\left(x^2+1\right) \le f(2) \overset{f\uparrow}{\Leftrightarrow}$

$x^2 + 1 \le 2 \Leftrightarrow x^2 \le 1 \Leftrightarrow$

$|x| \le 1 \Leftrightarrow$ $\mathbf{-1 \le x \le 1}$

Γ4. Έστω συνάρτηση h, με $h(x) = x \cdot \int_0^{x^3 - x} f(t)\,dt,\ x \in [0\ ,\ 1]$

Η συνάρτηση f είναι συνεχής άρα η συνάρτηση f_1, με

$f_1(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ είναι παρ/μη στο [0 , 1] ,άρα και συνεχής

- η h είναι συνεχής στο [0 , 1] ως πράξεις των συνεχών f_1, f_2, με $f_2(x) = x^3 - x$ και f_3, με $f_3(x) = x$.
- η h είναι παραγωγίσιμη στο (0 , 1) ως πράξεις παραγωγίσιμων

  με $h'(x) = x \cdot f\left(x^3 - x\right) \cdot \left(3x^2 - x\right) + \int_0^{x^3 - x} f(t)\,dt$

- $h(0) = 0 \cdot \int_0^0 f(t)\,dt = 0$ και

  $h(1) = 1 \cdot \int_0^0 f(t)\,dt = 0$

Άρα από θ. Rolle

η εξίσωση $h'(x) = 0$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (0 , 1)

Επομένως υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (0\ ,\ 1)$ τέτοιο, ώστε

$$\int_0^{\xi^3 - \xi} f(t)\,dt = -\xi \cdot (3\xi^2 - 1) \cdot f(\xi^3 - \xi).$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = x + \int_1^x \left(\int_1^u \frac{\left(f'(t)\right)^2 - 1}{f(t)} dt \right) du$ **(1)**

Παραγωγίζουμε την (1) και έχουμε :

$f'(x) = 1 + \int_1^x \frac{\left(f'(t)\right)^2 - 1}{f(t)} dt\ ,\ x > 0$ **(2)**

Παραγωγίζουμε την (2) και έχουμε για κάθε $x > 0$

$$f''(x) = \frac{\left(f'(x)\right)^2 - 1}{f(x)} \Leftrightarrow f(x) \cdot f''(x) = \left(f'(x)\right)^2 - 1 \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{f(x) \cdot f''(x) + 1 = \left(f'(x)\right)^2}$$

Δ2.α. Είναι $f(x) \cdot f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$,άρα $f(x) \neq 0$ και $f'(x) \neq 0$.

Η f είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα από συνέπειες θ. Bolzano,

η f διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Είναι

$$f(1) = 1 + \int_1^1 \left(\int_1^u \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt \right) du = 1 > 0,$$

επομένως **$f(x) > 0$, για κάθε $x > 0$**.

Η f' είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ και $f'(x) \neq 0$, για κάθε $x > 0$, άρα από συνέπειες θ. Bolzano,

η f' διατηρεί σταθερό πρόσημο στο $(0, +\infty)$.

Είναι $f'(1) = 1 + \int_1^1 \frac{(f'(t))^2 - 1}{f(t)} dt = 1 > 0$,

επομένως **$f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$**.

β. $(f'(x))^2 = 1 + f(x) \cdot f''(x)$, για κάθε $x > 0$

Είναι $f'(x) > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα $f'(x) = \sqrt{1 + f(x) \cdot f''(x)}$

Η f' είναι συνεχής στο $x_0 = 0$, άρα

$$f'(0) = \lim_{x \to 0^+} f'(x) = \lim_{x \to 0^+} \sqrt{1 + f(x) \cdot f''(x)} = \sqrt{1 + \lim_{x \to 0^+} f(x) \cdot \lim_{x \to 0^+} f''(x)}$$

$$= \sqrt{1 + f(0) \cdot f''(0)} \overset{f(0) = 0}{=} \sqrt{1} = \mathbf{1}$$

Δ3.α. $$g'(x) = \left(\frac{f'(x)}{f(x)} \right)' = \frac{f''(x) \cdot f'(x) - [f'(x)]^2}{f^2(x)} \overset{(2)}{=} \frac{-1}{f^2(x)}$$

$$g(1) = \frac{f'(1)}{f(1)} = \frac{1}{1} = 1 \text{ και } g'(1) = \frac{-1}{f^2(1)} = \frac{-1}{1} = -1$$

(ε) : εφαπτομένη της C_g στο σημείο $M(1, g(1))$

(ε) : $y - g(1) = g'(1) \cdot (x - 1) \iff y = -x + 2$

Η g είναι κυρτή άρα η C_g βρίσκεται πάνω από την (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής M, άρα

$g(x) \geq 2 - x$, για κάθε $x > 0$

Δ3.β. Για κάθε $x > 0$ είναι :

$$g(x) \geq 2 - x \Leftrightarrow \frac{f'(x)}{f(x)} \geq 2 - x \overset{f(x)>0}{\Leftrightarrow} f'(x) \geq (2 - x) \cdot f(x)$$

Για $x = 0$ είναι : $f'(0) > (2 - 0) \cdot f(0)$

άρα $f'(x) \geq (2 - x) \cdot f(x)$, για κάθε $x \geq 0 \quad \Leftrightarrow$

$f'(x) - (2 - x) \cdot f(x) \geq 0$, για κάθε $x \geq 0$ και το "=" δεν ισχύει παντού

Επομένως $\int_0^1 [f'(x) - (2 - x) \cdot f(x)]\, dx > 0 \quad \Leftrightarrow$

$$\int_0^1 f'(x)\, dx - \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x)\, dx > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$[f(x)]_0^1 > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$f(1) - f(0) > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow$$

$$1 > \int_0^1 (2 - x) \cdot f(x)\, dx \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\int_0^1 (2 - x) \cdot f(x)\, dx > 1}$$

Δ4. Είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in [0, 1]$

$$E = \int_0^1 [f'(x)]^3 dx = \int_0^1 [f'(x)]^2 \cdot f'(x)\, dx$$

$$= \Big[[f'(x)]^2 \cdot f(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 2 \cdot f'(x) \cdot f''(x) \cdot f(x)\, dx$$

$$\overset{(2)}{=} [f'(1)]^2 \cdot f(1) - \cancel{[f'(0)]^2 \cdot f(0)} - \int_0^1 2 \cdot f'(x) \cdot \Big[[f'(x)]^2 - 1\Big] dx$$

$$= 1 - 2\int_0^1 \Big[[f'(x)]^3 - f'(x)\Big] dx$$

$$= 1 - 2\int_0^1 [f'(x)]^3 dx + 2\int_0^1 f'(x) dx$$

Άρα $E = 1 - 2E + 2[f(x)]_0^1 \quad \Leftrightarrow \quad 3E = 1 + 2f(1) - \cancel{2f(0)} \quad \Leftrightarrow$

$3E = 1 + 2 \quad \Leftrightarrow \quad 3E = 3 \quad \Leftrightarrow \quad$ **$E = 1$ τ.μ.**