ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Αν

- η f είναι συνεχής στο Δ και
- $f'(x)=0$ για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ,

τότε να αποδείξετε ότι η f είναι σταθερή σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 8

Α2. Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ (ολικό) μέγιστο, το $f(x_0)$;

Μονάδες 3

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ ισχύει $z-\bar{z}=2\,\mathrm{Im}(z)$

(μονάδες 2)

β) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$ ή $-\infty$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{1}{f(x)}=0$

(μονάδες 2)

γ) Αν μια συνάρτηση f παρουσιάζει (ολικό) μέγιστο, τότε αυτό θα είναι το μεγαλύτερο από τα τοπικά της μέγιστα.

(μονάδες 2)

δ) Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ και $\alpha, \beta, \gamma \in \Delta$, τότε ισχύει

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx + \int_{\gamma}^{\beta} f(x)\,dx$$

(μονάδες 2)

ε) Έστω συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίσιμη σε κάθε εσωτερικό σημείο του Δ. Αν η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο Δ, τότε η παράγωγός της είναι υποχρεωτικά αρνητική στο εσωτερικό του Δ.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η εξίσωση

$$2|z|^2 + (z + \bar{z})i - 4 - 2i = 0, \quad z \in \mathbb{C}$$

Β1. Να λύσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 9

Β2. Αν $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$ είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, τότε να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39}$$

είναι ίσος με $-3i$

Μονάδες 8

Β3. Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών αριθμών u για τους οποίους ισχύει

$$|u + w| = |4z_1 - z_2 - i|$$

όπου w, z_1, z_2 οι μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β2.

Μονάδες 8

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $h(x) = x - \ln(e^x + 1), \quad x \in \mathbb{R}$

Γ1. Να μελετήσετε την h ως προς την κυρτότητα.

Μονάδες 5

Γ2. Να λύσετε την ανίσωση

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \quad , \quad x \in \mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Γ3. Να βρείτε την οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της h στο $+\infty$, καθώς και την πλάγια ασύμπτωτή της στο $-\infty$.

Μονάδες 6

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = e^x\left(h(x) + \ln 2\right), \quad x \in \mathbb{R}$

Να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$, τον άξονα $x'x$ και την ευθεία $x = 1$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x} & , \text{ αν } x \neq 0 \\ 1 & , \text{ αν } x = 0 \end{cases}$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 = 0$ και, στη συνέχεια, ότι είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 7

Δ2. Δίνεται επιπλέον ότι η f είναι κυρτή.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^{2f'(x)} f(u)\,du = 0$$

έχει ακριβώς μία λύση, η οποία είναι η $x = 0$ (μονάδες 7)

β) Ένα υλικό σημείο M ξεκινά τη χρονική στιγμή $t=0$ από ένα σημείο $A\left(x_0, f(x_0)\right)$ με $x_0<0$ και κινείται κατά μήκος της καμπύλης $y=f(x),\ x\geq x_0$ με $x=x(t),\ y=y(t),\ t\geq 0$. Σε ποιο σημείο της καμπύλης ο ρυθμός μεταβολής της τετμημένης $x(t)$ του σημείου M είναι διπλάσιος του ρυθμού μεταβολής της τεταγμένης του $y(t)$, αν υποτεθεί ότι $x'(t)>0$ για κάθε $t\geq 0$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 11

Δ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$g(x)=\left(xf(x)+1-e\right)^2\left(x-2\right)^2,\quad x\in\left(0,+\infty\right)$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g έχει δύο θέσεις τοπικών ελαχίστων και μία θέση τοπικού μεγίστου.

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΔΕΥΤΕΡΑ 2 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 251

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 273

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 150

Α4. **α.** Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $2|z|^2 + (z+\bar{z})i - 4 - 2i = 0 \underset{x,y\in IR}{\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}}$

$$2(x^2+y^2) + 2xi - 4 - 2i = 0 \overset{:2}{\Leftrightarrow} x^2+y^2+xi-2-i=0 \Leftrightarrow$$

$$x^2+y^2+xi-2-i=0 \Leftrightarrow (x^2+y^2-2)+(x-1)i=0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2+y^2-2=0 \\ x-1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1^2+y^2-2=0 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2=1 \\ x=1 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y=\pm 1 \\ x=1 \end{cases}$$ άρα $\mathbf{z=1\pm i}$

Β2. $w = 3\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{39} = 3\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^{39} = 3\left(\frac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}\right)^{39} = 3\left(\frac{2i}{2}\right)^{39}$

$$= 3\cdot i^{39} = 3\cdot\left(i^4\right)^9\cdot i^3 = 3\cdot 1\cdot(-i) = \mathbf{-3i}$$

Β3. $|u+w| = |4z_1 - z_2 - i| \Leftrightarrow |u-3i| = |4(1+i)-(1-i)-i| \Leftrightarrow$

$$|u-3i| = |4+4i-1+i-i| \Leftrightarrow |u-3i| = |3+4i| \Leftrightarrow$$

$$|u-3i| = \sqrt{3^2+4^2} \Leftrightarrow |u-3i| = 5$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο Κ (0 , 3) και ακτίνα ρ = 5

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $h(x) = x - \ell n(e^x + 1)$

$$h'(x) = 1 - \frac{1}{e^x + 1}\cdot(e^x + 1)' = 1 - \frac{e^x}{e^x + 1} = \frac{1}{e^x + 1}$$

$$h''(x) = -\frac{1}{(e^x + 1)^2}\cdot(e^x + 1)' = -\frac{e^x}{(e^x + 1)^2} < 0, \text{ για κάθε } x \in IR$$

άρα **η h είναι κοίλη στο IR**.

Γ2. $1^{ος}$ τρόπος

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \ell n e^{h(2h'(x))} < \ell n\frac{e}{e+1} \Leftrightarrow$$

$$h(2h'(x)) < 1 - \ell n(e+1) \Leftrightarrow h(2h'(x)) < h(1) \underset{h\uparrow}{\overset{h'(x)>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$2h'(x) < 1 \Leftrightarrow h'(x)) < \frac{1}{2} \Leftrightarrow h'(x) < h'(0) \underset{h'\downarrow}{\overset{h \text{ κοίλη}}{\Leftrightarrow}} \mathbf{x > 0}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Θεωρώ τη συνάρτηση q, με $q(x) = e^{h(2h'(x))}$

Είναι $q'(x) = e^{h(2h'(x))}\cdot h'(2h'(x))\cdot 2h''(x) < 0$,

διότι $e^{h(2h'(x))} > 0$, $h'(2h'(x)) > 0$ και $h''(x) < 0$

Άρα q γνησίως φθίνουσα στο IR

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow q(x) < q(0) \overset{q\downarrow}{\Leftrightarrow} \mathbf{x > 0}$$

$3^{ος}$ τρόπος

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow \frac{e^{2h'(x)}}{e^{2h'(x)} + 1} < \frac{e}{e+1}$$

Θεωρώ τη συνάρτηση s, με $s(x) = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$

Είναι $s'(x) = \dfrac{2e^x}{(e^x + 1)^2} > 0$, άρα s γν. αύξουσα στο IR

$$e^{h(2h'(x))} < \frac{e}{e+1} \Leftrightarrow s(2h'(x)) < s(1) \overset{s\uparrow}{\Leftrightarrow} 2h'(x) < 1 \Leftrightarrow$$

$$\frac{2}{e^x + 1} < 1 \Leftrightarrow 2 < e^x + 1 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow \mathbf{x > 0}$$

Γ3. • $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[x - \ln(e^x + 1)\right] = \lim\limits_{x\to+\infty}\left[\ln e^x - \ln(e^x + 1)\right]$

$$= \lim_{x\to+\infty}\left[\ln\frac{e^x}{e^x + 1}\right]$$

θέτω $u = \dfrac{e^x}{e^x + 1}$ με $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x + 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{e^x} = 1$

άρα $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{u\to1}(\ln u) = \ln 1 = 0$, επομένως

η C_f έχει οριζόντια ασύμπτωτη στο $+\infty$ την $y = 0$ (x΄x)

• $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{x - \ln(e^x + 1)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[1 - \dfrac{\ln(e^x + 1)}{x}\right]$

Είναι $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\ln(e^x + 1)}{x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^x}{e^x + 1} = 0$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

άρα $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x} = 1 = \lambda$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x) - \lambda x\right] = \lim\limits_{x\to-\infty}\left[x - \ln(e^x + 1) - x\right]$

$= \lim\limits_{x\to-\infty}\left[-\ln(e^x + 1)\right] = 0 = \beta$, αφού $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

άρα **η C_f έχει πλάγια ασύμπτωτη στο $-\infty$ την $y = x$**

Γ4. Αναζητώ τις ρίζες της φ.

$\varphi(x) = 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (h(x) + \ln 2) = 0 \Leftrightarrow h(x) + \ln 2 = 0 \Leftrightarrow$

$h(x) = -\ln 2 \Leftrightarrow h(x) = h(0) \overset{h\uparrow}{\underset{h\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow}} x = 0$

Αναζητώ το το πρόσημο της φ στο [0 , 1]

$0 \le x \le 1 \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} h(0) \le h(x) \le h(1) \Rightarrow -\ln 2 \le h(x) \Leftrightarrow$

$h(x) + \ln 2 \ge 0 \Leftrightarrow e^x \cdot (h(x) + \ln 2) \ge 0 \Leftrightarrow \varphi(x) \ge 0$

Υπολογισμός εμβαδού

$1^{ος}$ τρόπος

$$E = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^x\cdot(h(x) + \ell n2)\,dx = \int_0^1 (e^x)'\cdot(h(x) + \ell n2)\,dx$$

$$= \left[e^x\cdot(h(x) + \ell n2)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot(h(x) + \ell n2)'\,dx$$

$$= e\cdot(h(1) + \ell n2 - 0 - \int_0^1 e^x\cdot h'(x)\,dx$$

$$= e\cdot[1 - \ell n(e + 1) + \ell n2] - \int_0^1 e^x\cdot\frac{1}{e^x + 1}\,dx$$

$$= e - e\ell n(e + 1) + e\ell n2 - \left[\ell n(e^x + 1)\right]_0^1$$

$$= e - e\ell n(e + 1) + e\ell n2 - \ell n(e + 1) + \ell n2$$

$$= e + (e + 1)\ell n2 - (e + 1)\ell n(e + 1)$$

$$= e + (e + 1)[\ell n2 - \ell n(e + 1)]$$

$$= \left[\mathbf{e + (e + 1)\cdot \ell n\frac{2}{e + 1}}\right] \text{τ.μ.}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$E = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^x\cdot(h(x) + \ell n2)\,dx = \int_0^1 e^x\cdot h(x)\,dx + \ell n2\cdot\int_0^1 e^x\,dx$$

$$= \int_0^1 (e^x)'\cdot h(x)\,dx + \ell n2\cdot\left[e^x\right]_0^1$$

$$= \left[e^x\cdot h(x)\right]_0^1 - \int_0^1 e^x\cdot h'(x)\,dx + \ell n2\cdot(e - 1)$$

$$= e\cdot h(1) - h(0) - \int_0^1 e^x\cdot\frac{1}{e^x + 1}\,dx + \ell n2\cdot(e - 1)$$

$$= e\cdot[1 - \ell n(e + 1)] + \ell n2 - \left[\ell n(e^x + 1)\right]_0^1 + \ell n2\cdot(e - 1)$$

$$= e - e\ell n(e + 1) + \ell n2 - \ell n(e + 1) + \cancel{\ell n2} + e\ell n2 - \cancel{\ell n2}$$

$$= e - e\ell n(e + 1) + \ell n2 - \ell n(e + 1) + e\ell n2$$

$$= e + (e + 1)\ell n2 - (e + 1)\ell n(e + 1)$$

$$= e + (e + 1)[\ell n2 - \ell n(e + 1)]$$

$$= \left[\mathbf{e + (e + 1)\cdot \ell n\frac{2}{e + 1}}\right] \text{τ.μ.}$$

$3^{ος}$ τρόπος

$$E = \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_0^1 e^x \cdot (h(x) + \ell n2)\,dx$$

$$= \int_0^1 e^x \cdot (x - \ell n(e^x + 1) + \ell n2)\,dx$$

$$= \underbrace{\int_0^1 e^x \cdot x\,dx}_{I_1} - \underbrace{\int_0^1 e^x \cdot \ell n(e^x + 1)\,dx}_{I_2} + \ell n2 \cdot \underbrace{\int_0^1 e^x\,dx}_{I_3}$$

$$I_1 = \int_0^1 (e^x)' \cdot x\,dx = \left[e^x \cdot x\right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (x)'\,dx = e - 0 - \int_0^1 e^x\,dx$$

$$= e - \left[e^x\right]_0^1 = e - (e - 1) = e - e + 1 = 1$$

Θέτω $e^x + 1 = u$

$e^x dx = du$

$x = 0 \rightarrow u = 2,$

$x = 1 \rightarrow u = e+1$

$$I_2 = \int_0^1 e^x \cdot \ell n(e^x + 1)\,dx$$

$$= \int_2^{e+1} \ell nu\,du$$

$$= \int_2^{e+1} (u)' \cdot \ell nu\,du$$

$$= \left[u \cdot \ell nu\right]_2^{e+1} - \int_2^{e+1} u \cdot (\ell nu)'\,du$$

$$= (e + 1) \cdot \ell n(e + 1) - 2\ell n2 - \int_2^{e+1} 1\,du$$

$$= (e + 1) \cdot \ell n(e + 1) - 2\ell n2 - \left[u\right]_2^{e+1}$$

$$= (e + 1) \cdot \ell n(e + 1) - 2\ell n2 - e + 1$$

$$I_3 = \int_0^1 e^x\,dx = \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$$

$$E = I_1 - I_2 + \ell n2 \cdot I_3$$

$$= \cancel{1} - (e + 1) \cdot \ell n(e + 1) + 2\ell n2 + e \cancel{-1} + \ell n2 \cdot (e - 1)$$

$$= e - e\ell n(e + 1) + \ell n2 - \ell n(e + 1) + \cancel{\ell n2} + e\ell n2 - \cancel{\ell n2}$$

$$= e + (e + 1)[\ell n2 - \ell n(e + 1)]$$

$$= \left[\mathbf{e + (e + 1) \cdot \ell n \frac{2}{e + 1}}\right] \text{τ.μ.}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1} = 1 = f(0)$

άρα **f συνεχής στο $x_0 = 0$**

Για $x \neq 0 : f'(x) = \dfrac{e^x \cdot x - (e^x - 1)}{x^2} = \dfrac{xe^x - e^x + 1}{x^2}$

Θεωρώ συνάρτηση r, με $r(x) = xe^x - e^x + 1$

Είναι $r'(x) = x \cdot e^x,\ x \in IR$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$r'(x)$	-	0	+
$r(x)$	↘		↗

- $x < 0 \overset{r\downarrow}{\Leftrightarrow} r(x) > r(0) \Leftrightarrow r(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$
- $x > 0 \overset{r\uparrow}{\Leftrightarrow} r(x) > r(0) \Leftrightarrow r(x) > 0 \Rightarrow f'(x) > 0$

Είναι $f'(x) > 0$ στα $(-\infty, 0), (0, +\infty)$

και επειδή f συνεχής στο $x_0 = 0$

η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

Δ2. $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to -\infty}(e^x - 1) \cdot \lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{1}{x} = (-1)\cdot 0 = 0$

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{e^x}{1} = \lim\limits_{x\to +\infty} e^x = +\infty$

Είναι f γνησίως αύξουσα, άρα έχει σύνολο τιμών το $(0, +\infty)$

άρα $f(x) > 0$ για κάθε $x \in IR$.

Επίσης $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{e^x - 1}{x} - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1 - x}{x^2} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}$

$= \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{2x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{2} = \dfrac{1}{2} = f'(0)$

Δ2. α) $1^{ος}$ τρόπος

Πρόταση : Έστω η συνάρτηση Q, με $Q(x) > 0$.

- αν $\alpha < \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta Q(x)\,dx > 0$
- αν $\alpha > \beta$, τότε $\int_\beta^\alpha Q(x)\,dx > 0 \Leftrightarrow \int_\alpha^\beta Q(x)\,dx < 0$
- αν $\alpha = \beta$, τότε $\int_\alpha^\beta Q(x)\,dx = \int_\alpha^\alpha Q(x)\,dx = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to-\infty}(e^x - 1)\cdot\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = (-1)\cdot 0 = 0$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x - 1}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{1} = \lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$$

Στο ολοκλήρωμα $\int_1^{2f'(x)} f(t)\,dt$ τα άκρα είναι θετικοί αριθμοί

και επειδή $f(x) > 0$ στο IR

σύμφωνα με την παραπάνω πρόταση που αποδείξαμε

$$2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \underset{f'\uparrow,\ f'\ 1\text{-}1}{\overset{f\ \text{κυρτή}}{\Leftrightarrow}} \mathbf{x = 0}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Η f είναι συνεχής στο IR. Έστω F μια αρχική της f.
Είναι $F'(x) = f(x) > 0$, άρα η F είναι γνησίως αύξουσα στο IR

$$\int_1^{2f'(x)} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \left[F(x)\right]_1^{2f'(x)} = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) = F(1)$$

και επειδή η F είναι 1-1 ως γνησίως αύξουσα

$$2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \underset{f'\uparrow,\ f'\ 1\text{-}1}{\overset{f\ \text{κυρτή}}{\Leftrightarrow}} \mathbf{x = 0}$$

$3^{ος}$ τρόπος

Έστω συνάρτηση F, με $F(x) = \int_1^x f(t)\,dt,\ x \in IR$

Είναι $F'(x) = f(x) > 0$, άρα F γνησίως αύξουσα στο IR

άρα η F έχει προφανή και μοναδική ρίζα το 1.

$$\int_1^{2f'(x)} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow F(2f'(x)) = 0 \Leftrightarrow$$

$$2f'(x) = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow f'(x) = f'(0) \underset{f'\uparrow,\ f'\ 1\text{-}1}{\overset{f\ \text{κυρτή}}{\Leftrightarrow}} \mathbf{x = 0}$$

$4^{ος}$ τρόπος

Έστω συνάρτηση F, με $\varphi(x) = \int_1^{2f'(x)} f(t)\,dt$, $x \in IR^*$

Η φ είναι παραγωγίσιμη στο IR^*, ως σύνθεση των

παραγωγίσιμων $f_1(x) = 2f'(x)$ και $f_2(x) = \int_1^{x} f(t)\,dt$

με $\varphi'(x) = f(2f'(x)) \cdot 2 \cdot f''(x)$, $x \in IR^*$

Είναι $f(x) > 0$, άρα το πρόσημο της φ΄ το καθορίζει η f΄΄

$$f''(x) = \left(\frac{xe^x - e^x + 1}{x^2}\right)' = \frac{xe^x \cdot x^2 - (xe^x - e^x + 1)\cdot 2x}{x^4}$$

$$= \frac{x^2e^x - 2xe^x + 2e^x - 2}{x^3} = \frac{(x^2 - 2x + 2)e^x - 2}{x^3},\ x \in IR^*$$

Θεωρώ συνάρτηση Q, με $Q(x) = (x^2 - 2x + 2)e^x - 2$, $x \in IR$

Είναι $Q'(x) = (2x - 2)e^x + (x^2 - 2x + 2)e^x = x^2e^x$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Q΄(x)	+	0	+
Q (x)	↗		↗

Η Q είναι γνησίως αύξουσα στο IR

$Q(x) > 0 \Leftrightarrow Q(x) > Q(0) \Leftrightarrow x > 0$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
Q (x)	-	0	+
x^3	-	0	+
f΄΄(x)	+		+
φ΄(x)	+		+
φ (x)	↗		↗

Η φ είναι γνησίως αύξουσα στα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και επειδή είναι συνεχής στο $x_0 = 0$,
άρα η φ είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

$$\int_1^{2f'(x)} f(t)\,dt = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = \varphi(0) \underset{\varphi\ 1\text{-}1}{\overset{\varphi \uparrow}{\Leftrightarrow}} \mathbf{x = 0}$$

Δ2. β) Είναι $f(x(t)) = y(t),\ t \geq 0$

Άρα $f'(x(t)) \cdot x'(t) = y'(t)$ και για $t = t_0$

$$f'(x(t_0)) \cdot x'(t_0) = y'(t_0) \overset{x'(t_0)=2y'(t_0)}{\Leftrightarrow}$$

$$f'(x(t_0)) \cdot 2y'(t_0) = y'(t_0) \underset{y'(t_0)>0}{\overset{x'(t_0)>0}{\Leftrightarrow}}$$

$$2f'(x(t_0)) = 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x(t_0)) = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow$$

$$f'(x(t_0)) = f'(0) \underset{\substack{f'\uparrow \\ f'\ 1\text{-}1}}{\overset{f\ \text{κυρτή}}{\Leftrightarrow}} x(t_0) = 0$$

και

$y(t_0) = f(x(t_0)) = f(0) = 1$,

άρα **το ζητούμενο σημείο είναι το $M(0, 1)$**

Δ3. Για $x > 0$ έχουμε :

- $$g(x) = [x \cdot f(x) + 1 - e]^2 \cdot (x-2)^2$$
  $$= \left(x \cdot \frac{e^x - 1}{x} + 1 - e\right)^2 \cdot (x-2)^2$$
  $$= \left(e^x - 1 + 1 - e\right)^2 \cdot (x-2)^2$$
  $$= \left(e^x - e\right)^2 \cdot (x-2)^2$$

- $$g'(x) = 2\left(e^x - e\right) \cdot e^x \cdot (x-2)^2 + \left(e^x - e\right)^2 \cdot 2 \cdot (x-2)$$
  $$= 2\left(e^x - e\right) \cdot (x-2)\left[e^x \cdot (x-2) + e^x - e\right]$$
  $$= 2\left(e^x - e\right) \cdot (x-2)\left(xe^x - e^x - e\right)$$

$1^{η}$ λύση

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = x \cdot e^x - e^x - e,\ x > 0$

Θα αποδείξουμε ότι η h έχει μια μόνο ρίζα

$1^{ος}$ τρόπος

- h συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- $h(1) = -e < 0$

  $h(2) = e^2 - e = e(e-1) > 0$

από Θ.Bolzano

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $h(x_0) = 0$.

$2^{ος}$ τρόπος

- g συνεχής στο $[1, 2]$ ως πράξεις συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο $(1, 2)$
- $g(1) = g(2) = 0$

από Θ.Rolle

υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1, 2)$, τέτοιο ώστε $g'(x_0) = 0$

και επειδή $e^{x_0} - e \neq 0$ και $x_0 - 2 \neq 0$, θα είναι $h(x_0) = 0$.

Είναι $h'(x) = x \cdot e^x > 0$, για κάθε $x > 0$, άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$, επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

$g'(x) = 0 \Leftrightarrow$

$e^x - e = 0$ ή $x - 2 = 0$ ή $h(x) = 0 \Leftrightarrow$

$x = 1$ ή $x = 2$ ή $x = x_0$

- $e^x - e > 0 \Leftrightarrow e^x > e \Leftrightarrow x > 1$
- $h(x) > 0 \Leftrightarrow h(x) > h(x_0) \overset{h\uparrow}{\Leftrightarrow} x > x_0$

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$e^x - e$		-	0	+		+		+	
$x - 2$		-		-		-	0	+	
$h(x)$		-		-	0	+		+	
$g'(x)$		-	0	+	0	-	0	+	
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	
			τ.ελ.		τ.μεγ.		τ.ελ.		

Επομένως **η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο μόνο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο μόνο στο x_0.**

$2^η$ λύση

Είναι $g(x) \geq 0$, άρα η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο το 0.

$g(x) = 0 \Leftrightarrow$
$(e^x - e)^2 \cdot (x - 2)^2 = 0 \Leftrightarrow$
$e^x - e = 0$ ή $x - 2 = 0 \Leftrightarrow$
$e^x = e$ ή $x = 2 \Leftrightarrow$
$x = 1$ ή $x = 2$, επομένως
η g παρουσιάζει ολικό ελάχιστο μόνο για $x = 1$ και $x = 2$.

Η g είναι συνεχής στο $[1 , 2]$ ως πράξεις συνεχών, άρα
από Θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής
υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1 , 2)$, τέτοιο ώστε η g να
παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0.

Από Θ. Fermat θα είναι $g'(x_0) = 0$
και επειδή $e^{x_0} - e \neq 0$ και $x_0 - 2 \neq 0$, θα είναι
$x_0 \cdot e^{x_0} - e^{x_0} - e = 0$.

Θεωρούμε συνάρτηση h, με $h(x) = x \cdot e^x - e^x - e$, $x > 0$
Είναι $h'(x) = x \cdot e^x > 0$, για κάθε $x > 0$,
άρα η h είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$,
επομένως το x_0 είναι μοναδικό.

x	0		1		x_0		2		$+\infty$
$g(x)$		↘		↗		↘		↗	
			τ.ελ.		τ.μεγ.		τ.ελ.		

Επομένως **η g παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο μόνο στα $x_1 = 1$ και $x_2 = 2$, ενώ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο μόνο στο x_0.**