ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Δίνεται μία συνάρτηση $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$. Να δώσετε τον ορισμό της συνέχειας της f στο διάστημα $[\alpha,\beta]$.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και η F είναι μία παράγουσα της f, τότε ισχύει: $\int_\alpha^\beta f(x)dx = F(\beta)-F(\alpha)$

(Μον. 2)

β) Το εύρος των τιμών μιας μεταβλητής δεν επηρεάζεται από τις ακραίες τιμές της.

(Μον. 2)

γ) Αν η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και $c\in\mathbb{R}$ μία σταθερά, τότε ισχύει:

$$(c\cdot f)'(x) = f'(x)+c$$

(Μον. 2)

δ) $(x^\alpha)' = \alpha\cdot x^{\alpha+1}, x>0, \alpha\in\mathbb{R}^*$.

(Μον. 2)

ε) Αν η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx = -\int_{\beta}^{\alpha} f(x)dx.$$

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε και να συμπληρώσετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες:

α) Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, τότε: $(f-g)'(x) = \ldots$

(Μον. 3)

β) $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\, dx = \ldots$

(Μον. 3)

γ) Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell,\ \ell \in \mathbb{R}$, τότε $\lim_{x\to x_0} |f(x)| = \ldots$

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, για την οποία ισχύει: $x\cdot f(x) - 2\cdot f(x) = x^2 - 4$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Β1. Να δείξετε ότι: $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, για $x \neq 2$.

Μονάδες 7

Β2. Να βρείτε το $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}$.

Μονάδες 9

Β3. Να βρείτε το $f(2)$.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Γ

Στον παρακάτω πίνακα παρουσιάζονται οι ηλικίες των υπαλλήλων μίας εταιρείας:

Α/Α	**Ηλικίες υπαλλήλων**	**Συχνότητα (αριθμός υπαλλήλων) ν_i**	**Κέντρο κλάσης x_i**	**$x_i\nu_i$**	**Σχετική συχνότητα $f_i\%$**
1η κλάση	[25, 35)	100			
2η κλάση	[35, 45)	50			
3η κλάση	[45, 55)	40			
4η κλάση	[55, 65)	10			
ΣΥΝΟΛΑ		ν=200			

Γ1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παραπάνω πίνακα και να τον συμπληρώσετε.

Μονάδες 7

Γ2. Να υπολογίσετε τη μέση ηλικία των υπαλλήλων.

Μονάδες 5

Γ3. Να υπολογίσετε το ποσοστό των υπαλλήλων που έχουν ηλικία τουλάχιστον σαράντα πέντε (45) ετών.

Μονάδες 4

Γ4. Από την εταιρεία αποχωρούν πέντε (5) υπάλληλοι της 4ης κλάσης, πέντε (5) υπάλληλοι της 2ης κλάσης και ταυτόχρονα προσλαμβάνονται δέκα (10) υπάλληλοι με ηλικίες στην 1η κλάση. Να υπολογίσετε τη νέα μέση τιμή της ηλικίας των υπαλλήλων.

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^x \cdot (x-1),\ x \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι: $f'(x) = f(x) + e^x$.

Μονάδες 6

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f ως προς τη μονοτονία και να βρείτε τα τοπικά της ακρότατα.

Μονάδες 9

Δ3. Αν $g(x) = f(x) + e^x,\ x \in \mathbb{R}$, να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης g, τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες με εξισώσεις $x = -1$ και $x = 1$.

Μονάδες 10

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνον τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση**.** Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα.
4. Να γράψετε τις απαντήσεις σας μόνον με μπλε ή μόνον με μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης.
5. Κάθε απάντηση τεκμηριωμένη επιστημονικά είναι αποδεκτή.
6. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
7. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
ΤΡΙΤΗ 3 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 138

Α2. **α.** Σωστό, **β.** Λάθος, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

Α3. **α.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο IR, τότε: $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

β. $\int_{\alpha}^{\beta} \sigma\upsilon\nu x\, dx = [\eta\mu x]_{\alpha}^{\beta} = \eta\mu\beta - \eta\mu\alpha$

γ. Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell$, $\ell \in IR$, τότε $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)| = |\ell|$

ΘΕΜΑ Β

Β1. $x \cdot f(x) - 2f(x) = x^2 - 4 \Leftrightarrow (x-2)\cdot f(x) = x^2 - 4$

Για $x \neq 2$ είναι $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

Β2. $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{x^2-4}{x-2} = \lim\limits_{x\to 2} \dfrac{\cancel{(x-2)}(x+2)}{\cancel{x-2}} = \lim\limits_{x\to 2}(x+2) = 4.$

Β3. Η f είναι συνεχής στο $x_0 = 2$, άρα

$$f(2) = \lim_{x\to 2} f(x) = \lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{x-2} = 4$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Α/Α	Κλάσεις	ν_i	x_i	$x_i \cdot \nu_i$	$f_i\%$
1η κλάση	[25 , 35)	100	30	3000	50
2η κλάση	[35 , 45)	50	40	2000	25
3η κλάση	[45 , 55)	40	50	2000	20
4η κλάση	[55 , 65)	10	60	600	5
ΣΥΝΟΛΑ		ν = 200	-	**7600**	**100**

Γ2. $$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{7600}{200} = \mathbf{38 \text{ έτη}}$$

Γ3. $f_3\% + f_4\% = 20\% + 5\% = 25\%$

άρα το 25% των υπαλλήλων έχουν ηλικία τουλάχιστον 45€.

Γ4.

Α/Α	Κλάσεις	ν_i	x_i	$x_i \cdot \nu_i$
1η κλάση	[25 , 35)	**110**	30	**3300**
2η κλάση	[35 , 45)	**45**	40	**1800**
3η κλάση	[45 , 55)	40	50	2000
4η κλάση	[55 , 65)	**5**	60	**300**
ΣΥΝΟΛΑ		ν = 200	-	**7400**

$$\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + x_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \frac{7400}{200} = \mathbf{37 \text{ έτη}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $f(x) = e^x \cdot (x - 1)$

$$f'(x) = \left[e^x \cdot (x-1)\right]' = (e^x)' \cdot (x-1) + e^x \cdot (x-1)'$$

$$= e^x \cdot (x-1) + e^x = f(x) + e^x$$

Δ2. $f'(x) = e^x \cdot (x-1) + e^x = x \cdot e^x - e^x + e^x = x \cdot e^x$

$$f'(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot e^x = 0 \;\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\; x = 0$$

$$f'(x) > 0 \;\Leftrightarrow\; x \cdot e^x > 0 \;\overset{e^x>0}{\Leftrightarrow}\; x > 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$ ενώ είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$.
Η f παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο για $x = 0$ την τιμή $f(0) = -1$

Δ3. $g(x) = f(x) + e^x = f'(x) = x \cdot e^x$

$$E = -\int_{-1}^{0} g(x)\,dx + \int_{0}^{1} g(x)\,dx = -\int_{-1}^{0} f'(x)\,dx + \int_{0}^{1} f'(x)\,dx$$

$$= -\left[f(x)\right]_{-1}^{0} + \left[f(x)\right]_{0}^{1} = -\left[f(0) - f(-1)\right] + f(1) - f(0)$$

$$= -(-)1 + \frac{-2}{e} + 0 - (-1) = \left(2 - \frac{2}{e}\right) \text{τ.μ.}$$