ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014 - ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για δύο οποιαδήποτε ενδεχόμενα A, B ενός δειγματικού χώρου Ω, να αποδείξετε ότι

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η συνάρτηση f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x_1 \in A$;

Μονάδες 4

Α3. Τι ονομάζεται (απόλυτη) συχνότητα v_i της τιμής x_i μιας μεταβλητής X ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Σε μια κανονική ή περίπου κανονική κατανομή το 99,7% περίπου των παρατηρήσεων βρίσκεται στο διάστημα $(\bar{x} - 2s,\ \bar{x} + 2s)$, όπου $\bar{x}$ η μέση τιμή και s η τυπική απόκλιση των παρατηρήσεων. (μονάδες 2)

β) Σε ομαδοποιημένα δεδομένα το εμβαδόν του χωρίου που ορίζεται από το πολύγωνο συχνοτήτων και τον οριζόντιο άξονα είναι πάντοτε ίσο με ένα. (μονάδες 2)

γ) Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο σημείο x_0. Ο συντελεστής διεύθυνσης της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο της $(x_0,\ f(x_0))$ είναι $f'(x_0)$ (μονάδες 2)

δ) Το ενδεχόμενο $A - B$ πραγματοποιείται, όταν πραγματοποιείται το A αλλά όχι το B (μονάδες 2)

ε) Ο σταθμισμένος αριθμητικός μέσος ή σταθμικός μέσος είναι ένα μέτρο διασποράς. (μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Η βαθμολογία εξήντα μαθητών ενός Λυκείου σε ένα διαγώνισμα Μαθηματικών βρίσκεται στο διάστημα [10, 20) και έχει ομαδοποιηθεί σε πέντε κλάσεις ίσου πλάτους. Γνωρίζουμε, επίσης, ότι έξι μαθητές έχουν πάρει βαθμό μικρότερο από 12, δεκαοκτώ μαθητές μικρότερο από 14, έξι μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 18 και δεκαοκτώ μαθητές μεγαλύτερο ή ίσο του 16.

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον παρακάτω πίνακα συχνοτήτων κατάλληλα συμπληρωμένο, δικαιολογώντας τις απαντήσεις σας.

Κλάσεις	**Κεντρικές Τιμές x_i**	**Συχνότητα v_i**	**Σχετική Συχνότητα $f_i\%$**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	**Αθροιστική Σχετική Συχνότητα $F_i\%$**
[10, ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , ·)					
[· , 20)					
Σύνολο					

Μονάδες 12

Β2. Να βρείτε τη μέση βαθμολογία $\bar{x}$ των μαθητών και τη διάμεσο δ των βαθμολογιών τους.

Μονάδες 8

Β3. Στο 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση πρόκειται να δοθεί έπαινος. Από ποιον βαθμό και πάνω πρέπει να έχει γράψει κάποιος μαθητής για να πάρει έπαινο; (Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες).

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Έστω $\Omega=\{-1,\ 0,\ 1,\ 2\}$ ο δειγματικός χώρος ενός πειράματος τύχης. Οι πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω δίνονται από τη σχέση

$$P(\kappa)=\frac{\alpha}{\kappa^2+1}\ , \quad \kappa\in\Omega,\ \text{με } \alpha>0$$

Θεωρούμε τα ενδεχόμενα A, B του Ω με

$$A=\{\ \kappa\in\Omega\ /\ \kappa^2>1\ \}$$

$$B=\{\ \kappa\in\Omega\ /\ (\kappa^2-1)(\kappa^2-4)=0\ \}$$

Γ1. Να αποδείξετε ότι $\alpha=\frac{5}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των απλών ενδεχομένων του Ω.

Μονάδες 8

Γ2. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{11}$, $P(B)=\frac{6}{11}$ και να βρείτε τις πιθανότητες των ενδεχομένων:

Γ: «να πραγματοποιείται το B και όχι το A»

Δ: «να μην πραγματοποιείται το A ή να μην πραγματοποιείται το B».

Μονάδες 10

Γ3. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x)=\frac{1}{3}x^3+\frac{\kappa}{2}x^2+\frac{9}{4}x-1\ , \quad x\in\mathbb{R},\quad \kappa\in\Omega$$

και το ενδεχόμενο

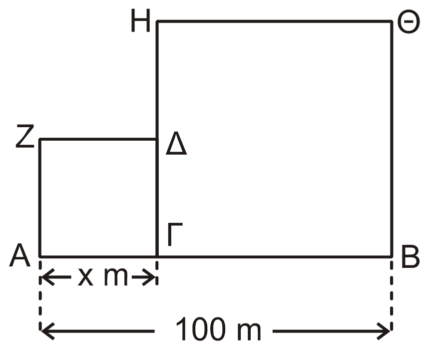
$$E=\{\ \kappa\in\Omega\ /\ \text{η συνάρτηση } f \text{ να είναι γνησίως αύξουσα}\ \}.$$

Να εξετάσετε αν το ενδεχόμενο E είναι βέβαιο.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ με μήκος 100 m. Θεωρούμε εσωτερικό σημείο Γ του ΑΒ τέτοιο, ώστε το μήκος του τμήματος ΑΓ να είναι x m.



Δ1. Κατασκευάζουμε τα τετράγωνα ΑΓΔΖ και ΓΒΘΗ, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

i) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των εμβαδών των δύο τετραγώνων, ως συνάρτηση του x, είναι

$$E(x) = 2x^2 - 200x + 10000, \quad x \in (0,\ 100)$$

(μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του x το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο.

(μονάδες 5)

Μονάδες 8

Στη συνέχεια, για $x = 50$, χωρίζουμε το ευθύγραμμο τμήμα ΑΓ σε ν διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ με αντίστοιχα μήκη x_i, $i = 1, 2, ..., \nu$.

Αν η μέση τιμή των μηκών x_i, $i = 1, 2, ..., \nu$ είναι $\bar{x} = 2$ και η τυπική τους απόκλιση είναι $s = 0{,}2$ τότε:

Δ2. Να δείξετε ότι $\nu = 25$

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τη μέση τιμή των εμβαδών των τετραγώνων που κατασκευάζονται με πλευρές τα διαδοχικά τμήματα ℓ_i με αντίστοιχα μήκη x_i, όπου $i = 1, 2, ..., 25$

Δίνεται ότι: $$s^2 = \frac{1}{\nu}\left\{\sum_{i=1}^{\nu} t_i^2 - \frac{\left(\sum_{i=1}^{\nu} t_i\right)^2}{\nu}\right\}$$

Μονάδες 6

Δ4. Επιλέγουμε τυχαία ένα από τα διαδοχικά ευθύγραμμα τμήματα ℓ_i, i = 1, 2, ..., 25

Να βρείτε την πιθανότητα του ενδεχομένου

$\Lambda = \{ \ell_i$, i = 1, 2, ..., 25 τέτοιο, ώστε ο δείκτης i να είναι πολλαπλάσιο του 3 ή πολλαπλάσιο του 4 $\}$.

Μονάδες 6

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18.00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 20 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 151
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 14
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 65
Α4. α. Λάθος, **β.** Λάθος, **γ.** Σωστό, **δ.** Σωστό, **ε.** Λάθος.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $\nu = 60$

$$c = \frac{R}{5} = \frac{20 - 10}{5} = \frac{10}{5} = 2$$

$\nu_1 = 6$

$N_2 = 18 \Leftrightarrow \nu_1 + \nu_2 = 18 \Leftrightarrow 6 + \nu_2 = 18 \Leftrightarrow \nu_2 = 12$

$\nu_5 = 6$

$\nu_4 + \nu_5 = 18 \Leftrightarrow \nu_4 + 6 = 18 \Leftrightarrow \nu_4 = 12$

$\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4 + \nu_5 = \nu \Leftrightarrow \nu_3 + 36 = 60 \Leftrightarrow \nu_3 = 24$

Κλάσεις	Κεντρικές τιμές x_i	ν_i	$f_i\%$	N_i	$F_i\%$	$x_i\nu_i$
[10 , 12)	11	6	10	6	10	66
[12 , 14)	13	12	20	18	30	156
[14 , 16)	15	24	40	42	70	360
[16 , 18)	17	12	20	54	90	204
[18 , 20)	19	6	10	60	100	114
ΣΥΝΟΛΑ	-	60	100	-	-	900

Β2. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i v_i}{v} = \dfrac{900}{60} = \mathbf{15}$

Είναι $f_1\% + f_2\% + \dfrac{f_3\%}{2} = \dfrac{f_3\%}{2} + f_4\% + f_5\% = 50\%$

άρα $\boldsymbol{\delta = x_3 = 15}$

Β3. Στην κλάση [18 , 20) βρίσκεται το 10% των καλύτερων μαθητών. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες μέσα στις κλάσεις, άρα το 5% των μαθητών με την καλύτερη επίδοση βρίσκεται στο διάστημα [19 , 20). **Επομένως για να πάρει κάποιος μαθητής έπαινο έπρεπε να γράψει τουλάχιστον 19.**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $P(-1) = \dfrac{\alpha}{(-1)^2 + 1} = \dfrac{\alpha}{2}$

$P(0) = \dfrac{\alpha}{0^2 + 1} = \dfrac{\alpha}{1} = \alpha$

$P(1) = \dfrac{\alpha}{1^2 + 1} = \dfrac{\alpha}{2}$

$P(2) = \dfrac{\alpha}{2^2 + 1} = \dfrac{\alpha}{5}$

Είναι $P(-1) + P(0) + P(1) + P(2) = 1 \iff$

$\dfrac{\alpha}{2} + \alpha + \dfrac{\alpha}{2} + \dfrac{\alpha}{5} = 1 \overset{\cdot 10}{\iff} 5\alpha + 10\alpha + 5\alpha + 2\alpha = 10 \iff$

$22\alpha = 10 \iff \alpha = \dfrac{10}{22} \iff \boldsymbol{\alpha = \dfrac{5}{11}}$

Είναι $\mathbf{P(-1) = \dfrac{5}{22}}$, $\mathbf{P(0) = \dfrac{5}{11}}$, $\mathbf{P(1) = \dfrac{5}{22}}$, $\mathbf{P(2) = \dfrac{1}{11}}$

Γ2. • $\kappa^2 > 1 \Leftrightarrow |\kappa| > 1 \Leftrightarrow \kappa > 1$ ή $\kappa < -1$

και επειδή $\kappa \in \Omega$, θα είναι $\kappa = 2$, άρα $A = \{2\}$

$P(A) = P(2) \Rightarrow$ $\mathbf{P(A) = \frac{1}{11}}$

• $(\kappa^2 - 1)(\kappa^2 - 4) = 0 \Leftrightarrow \kappa^2 - 1 = 0$ ή $\kappa^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 = 1$ ή $\kappa^2 = 4 \Leftrightarrow \kappa = \pm 1$ ή $\kappa = \pm 2$

και επειδή $\kappa \in \Omega$, θα είναι $\kappa = -1$ ή 1 ή 2, άρα $B = \{-1, 1, 2\}$

1ος τρόπος $P(B) = P(-1) + P(1) + P(2) = \frac{5}{22} + \frac{5}{22} + \frac{1}{11} \Rightarrow$ $\mathbf{P(B) = \frac{6}{11}}$

ή

2ος τρόπος $P(B) = 1 - P(B') = 1 - P(0) = 1 - \frac{5}{11} \Rightarrow$ $\mathbf{P(B) = \frac{6}{11}}$

• $\Gamma = B - A = \{-1, 1\}$

1ος τρόπος $P(\Gamma) = P(-1) + P(1) = \frac{5}{22} + \frac{5}{22} \Rightarrow$ $\mathbf{P(\Gamma) = \frac{5}{11}}$

ή

2ος τρόπος $P(\Gamma) = P(B - A) = P(B) - P(B \cap A)$

και επειδή $B \cap A = \{2\} = A$

$P(\Gamma) = P(B) - P(A) = \frac{6}{11} - \frac{1}{11} \Rightarrow$ $\mathbf{P(\Gamma) = \frac{5}{11}}$

• $\Delta = A' \cup B'$

1ος τρόπος $A' = \{-1, 0, 1\}$ και $B' = \{0\}$, άρα $\Delta = \{-1, 0, 1\} = A'$

$P(\Delta) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{11} \Rightarrow$ $\mathbf{P(\Delta) = \frac{10}{11}}$

ή

2ος τρόπος $\Delta = A' \cup B' = (A \cap B)' = A'$

$P(\Delta) = P(A') = 1 - P(A) = 1 - \frac{1}{11} \Rightarrow$ $\mathbf{P(\Delta) = \frac{10}{11}}$

Γ3. $f'(x) = \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{\kappa}{2}x^2 + \frac{9}{4}x - 1\right)' = x^2 + \kappa x + \frac{9}{4}$

Για να είναι η f γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, πρέπει $f'(x) \geq 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα $\Delta \leq 0 \Leftrightarrow$

$\kappa^2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{9}{4} \leq 0 \Leftrightarrow \kappa^2 \leq 9 \Leftrightarrow |\kappa| \leq 3 \Leftrightarrow -3 \leq \kappa \leq 3$

και επειδή $\kappa \in \Omega$, θα είναι $\kappa = -1$ ή 0 ή 1 ή 2,

άρα $E = \{-1, 0, 1, 2\} = \Omega \rightarrow$ **βέβαιο ενδεχόμενο**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1.i) Αν $A\Gamma = x$, τότε $B\Gamma = 100 - x$

$E(x) = E_{AZ\Delta\Gamma} + E_{B\Gamma H\Theta} = x^2 + (100 - x)^2 \Leftrightarrow$

$E(x) = x^2 + 10000 - 200x + x^2 \Leftrightarrow$

$\mathbf{E(x) = 2x^2 - 200x + 10000}$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ x > 0 \\ \bullet\ 100 - x > 0 \Leftrightarrow x < 100 \end{array}\right\} \Rightarrow x \in (0, 100)$$

ii) $E'(x) = (2x^2 - 200x + 10000)' = 4x - 200, \; x \in (0, 100)$

$E'(x) = 0 \Leftrightarrow 4x - 200 = 0 \Leftrightarrow x = 50$

x	0	50	100
f΄(x)	-	0	+
f (x)	↘		↗

Το εμβαδόν E (x) γίνεται ελάχιστο για x = 50 m.

Δ2. $\bar{x} = \dfrac{\sum x_i}{v} \Leftrightarrow v = \dfrac{\sum x_i}{\bar{x}} \Rightarrow v = \dfrac{(ΑΓ)}{2} = \dfrac{x}{2} = \dfrac{50}{2} \Leftrightarrow$ **$v = 25$**

Δ3. $s^2 = \dfrac{1}{v}\left\{\sum x_i^{\,2} - \dfrac{\left(\sum x_i\right)^2}{v}\right\} \Leftrightarrow s^2 = \dfrac{\sum x_i^{\,2}}{v} - \bar{x}^2 \Leftrightarrow$

$\dfrac{\sum x_i^{\,2}}{v} = s^2 + \bar{x}^2 \Leftrightarrow \dfrac{\sum E_i}{v} = 0{,}2^2 + 2^2 \Leftrightarrow$ **$\bar{E} = 4{,}04\ m^2$**

Δ4. Το i είναι πολλαπλάσιο του 3 ή του 4, με i = 1, 2, … , 25,
άρα i = 3 ή 4 ή 6 ή 8 ή 9 ή 12 ή 15 ή 16 ή 18 ή 20 ή 21 ή 24

$Λ = \{ \ell_3 , \ell_4 , \ell_6 , \ell_8 , \ell_9 , \ell_{12} , \ell_{15} , \ell_{16} , \ell_{18} , \ell_{20} , \ell_{21} , \ell_{24} \}$

$P(Λ) = \dfrac{N(Λ)}{N(Ω)} = \dfrac{12}{25}$