ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f παραγωγίσιμη σε ένα διάστημα (α, β), με εξαίρεση ίσως ένα σημείο x_0 στο οποίο, όμως, η f είναι συνεχής. Αν η $f'(x)$ διατηρεί πρόσημο στο $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$, τότε να αποδείξετε ότι το $f(x_0)$ δεν είναι τοπικό ακρότατο και η f είναι γνησίως μονότονη στο (α, β)

Μονάδες 7

Α2. Να διατυπώσετε το θεώρημα του Bolzano.

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα Δ. Τι ονομάζουμε αρχική συνάρτηση ή παράγουσα της f στο Δ;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Η εξίσωση $|z - z_0| = \rho,\ \ \rho > 0$ παριστάνει κύκλο με κέντρο το σημείο $K(z_0)$ και ακτίνα ρ, όπου z, z_0 μιγαδικοί αριθμοί.

(μονάδες 2)

β) Έστω μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη σε ένα σύνολο της μορφής $(\alpha, x_0)\cup(x_0, \beta)$. Ισχύει η ισοδυναμία

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \left(\lim_{x\to x_0^-} f(x) = \lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty\right)$$

(μονάδες 2)

γ) Αν είναι $0<\alpha<1$, τότε $\lim\limits_{x\to-\infty} \alpha^x = 0$

(μονάδες 2)

δ) Έστω μια συνάρτηση f συνεχής σε ένα διάστημα Δ και δυο φορές παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του Δ. Αν η f είναι κυρτή στο Δ, τότε υποχρεωτικά $f''(x)>0$ για κάθε εσωτερικό σημείο του Δ.

(μονάδες 2)

ε) $\left(\int_\alpha^{g(x)} f(t)\,dt\right)' = f\big(g(x)\big)\,g'(x)$

με την προϋπόθεση ότι τα χρησιμοποιούμενα σύμβολα έχουν νόημα.

(μονάδες 2)

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z, w για τους οποίους ισχύουν:

- $w = \dfrac{2z-i}{2z+i}$, $\quad z \neq -\dfrac{i}{2}$
- w φανταστικός

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων των μιγαδικών αριθμών z, είναι ο κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \dfrac{1}{2}$, εκτός από το σημείο $M\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ του κύκλου.

Μονάδες 10

Β2. Από τους παραπάνω μιγαδικούς αριθμούς z, του ερωτήματος Β1, να βρείτε εκείνους για τους οποίους ισχύει $|w|=1$

Μονάδες 8

Β3. Αν είναι $z = \dfrac{1}{2}$, τότε να αποδείξετε ότι

$$w^4 + i\,w^7 = 0$$

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases} e^{\frac{\ell n x}{x}} & , \text{ αν } \ x>0 \\ 0 & , \text{ αν } \ x=0 \end{cases}$$

Γ1. Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο σημείο $x_0=0$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης f

Μονάδες 7

Γ3. **i)** Να αποδείξετε ότι, για $x>0$, ισχύει η ισοδυναμία

$$f(x)=f(4) \Leftrightarrow x^4=4^x$$

(μονάδες 2)

ii) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $x^4=4^x$, $x>0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1=2$ και $x_2=4$

(μονάδες 6)

Μονάδες 8

Γ4. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $\xi\in(2,\ 4)$ τέτοιο, ώστε

$$f'(\xi)\int_2^{\xi} f(t)\,dt = f(\xi)\left(\sqrt{2}-f(\xi)\right)$$

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση

$$f: A \to \mathbb{R}, \quad A = (0, +\infty)$$

με σύνολο τιμών $f(A) = \mathbb{R}$, τέτοια, ώστε

$$e^{f(x)}\left(f^2(x) - 2f(x) + 3\right) = x, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται (μονάδες 4) και να βρείτε την αντίστροφη συνάρτηση f^{-1} της f (μονάδες 3)

Μονάδες 7

Για τα ερωτήματα Δ2 και Δ3, δίνεται ότι

$$f^{-1}(x) = e^x\,(x^2 - 2x + 3), \quad x \in \mathbb{R}$$

Δ2. Να μελετήσετε τη συνάρτηση f^{-1} ως προς την κυρτότητα. (μονάδες 3) Στη συνέχεια, να βρείτε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f^{-1}, την εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της f^{-1} στο σημείο που αυτή τέμνει τον άξονα $y'y$, και την ευθεία $x = 1$ (μονάδες 6)

Μονάδες 9

Δ3. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τα σημεία $A\left(x, f^{-1}(x)\right)$, $B\left(f^{-1}(x), x\right)$ των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f αντίστοιχα.

i) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, το γινόμενο των συντελεστών διεύθυνσης των εφαπτομένων των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f^{-1} και f στα σημεία A και B αντίστοιχα, είναι ίσο με 1 (μονάδες 3)

ii) Να βρείτε για ποια τιμή του $x \in \mathbb{R}$ η απόσταση των σημείων A, B γίνεται ελάχιστη, και να βρείτε την ελάχιστη απόστασή τους.

(μονάδες 6)

Μονάδες 9

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα Ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: 18:00

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 21 ΙΟΥΝΙΟΥ 2014

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 263

Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 192

Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 303

Α4. **α.** Σωστό, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1^{ος} τρόπος

$$w \in I \Leftrightarrow \bar{w} = -w \Leftrightarrow$$

$$\overline{\frac{2z - i}{2z + i}} = -\frac{2z - i}{2z + i} \Leftrightarrow \frac{2\bar{z} + i}{2\bar{z} - i} = \frac{-2z + i}{2z + i} \Leftrightarrow$$

$$(2\bar{z} + i)\cdot(2z + i) = (2\bar{z} - i)\cdot(-2z + i) \Leftrightarrow$$

$$4z\bar{z} + \cancel{2\bar{z}i} + \cancel{2zi} - 1 = -4z\bar{z} + \cancel{2\bar{z}i} + \cancel{2zi} + 1 \Leftrightarrow 8z\bar{z} = 2 \Leftrightarrow$$

$$z\bar{z} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z|^2 = \frac{1}{4} \Leftrightarrow |z| = \frac{1}{2}$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

Εξαιρείται το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ διότι $z \neq -\frac{i}{2}$

B1. $2^{ος}$ τρόπος

$$w = \frac{2z - i}{2z + i} \underset{x,\,y \in \mathbb{R}}{\overset{z = x + yi}{=}} \frac{2(x + yi) - i}{2(x + yi) + i} = \frac{2x + 2yi - i}{2x + 2yi + i}$$

$$= \frac{(2x + 2yi - i)\cdot(2x - 2yi - i)}{(2x + 2yi + i)\cdot(2x - 2yi - i)}$$

$$= \frac{4x^2 \cancel{- 4xyi} - 2xi \cancel{+ 4xyi} + 4y^2 \cancel{+ 2y} - 2xi \cancel{- 2y} - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2}$$

$$= \frac{4x^2 + 4y^2 - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2} - \frac{4x}{(2x)^2 + (2y + 1)^2}i$$

$$w \in I \iff \mathrm{Re}(w) = 0 \iff \frac{4x^2 + 4y^2 - 1}{(2x)^2 + (2y + 1)^2} = 0 \iff$$

$$4x^2 + 4y^2 - 1 = 0 \iff 4x^2 + 4y^2 = 1 \iff x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

Επομένως ο ζητούμενος γ.τ. είναι

ο κύκλος C με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho = \frac{1}{2}$

Εξαιρείται το σημείο $M\left(0, -\frac{1}{2}\right)$ διότι $z \neq -\frac{i}{2}$

B2. $1^{ος}$ τρόπος

$$|w| = 1 \iff \left|\frac{2z - i}{2z + i}\right| = 1 \iff \frac{|2z - i|}{|2z + i|} = 1 \iff$$

$$|2z - i| = |2z + i| \iff |2z - i|^2 = |2z + i|^2 \iff$$

$$(2z - i)(2\bar{z} + i) = (2z + i)(2\bar{z} - i) \iff$$

$$\cancel{4z\bar{z}} + 2zi - 2\bar{z}i + \cancel{1} = \cancel{4z\bar{z}} - 2zi + 2\bar{z}i + \cancel{1} \iff$$

$$4zi = 4\bar{z}i \iff z = \bar{z} \iff z \in \mathbb{R} \overset{|z| = \frac{1}{2}}{\iff} \mathbf{z = \pm\frac{1}{2}}$$

B2. $2^{ος}$ τρόπος

$$|w| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{2z - i}{2z + i}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{|2z - i|}{|2z + i|} = 1 \Leftrightarrow$$

$$|2z - i| = |2z + i| \Leftrightarrow \cancel{2}\cdot\left|z - \frac{1}{2}i\right| = \cancel{2}\cdot\left|z + \frac{1}{2}i\right| \Leftrightarrow$$

$$\left|z - \frac{1}{2}i\right| = \left|z + \frac{1}{2}i\right|$$

άρα η εικόνα του z βρίσκεται στη μεσοκάθετο του AB

με $A\left(0, \frac{1}{2}\right)$ και $B\left(0, -\frac{1}{2}\right)$,

δηλαδή τον άξονα $x΄x$.

Επομένως $z \in IR \overset{|z| = \frac{1}{2}}{\Leftrightarrow} \mathbf{z = \pm\frac{1}{2}}$

B3. Για $z = \frac{1}{2}$ είναι :

$1^{ος}$ τρόπος

$$w = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{(1 - i)^2}{(1 + i)(1 - i)} = \frac{-2i}{2} = -i$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$w = \frac{1 - i}{1 + i} = \frac{-i^2 - i}{1 + i} = \frac{-i\cdot\cancel{(1 + i)}}{\cancel{1 + i}} = -i$$

Για $w = -i$ έχουμε :

$$w^4 + iw^7 = (-i)^4 + i(-i)^7 = i^4 - i^8 = 1 - 1 = 0$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}}$

θέτω $u = \frac{\ln x}{x}$ με $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \left(\frac{1}{x}\cdot \ln x\right) = -\infty$

διότι $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$ και $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$, άρα

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} e^{\frac{\ln x}{x}} = \lim\limits_{u\to -\infty} e^{u} = 0 = f(0)$

επομένως η f είναι συνεχής στο $x_0 = 0$

Γ2. Για $x > 0$ είναι $f(x) = e^{\frac{\ln x}{x}}$

$f'(x) = \left(e^{\frac{\ln x}{x}}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \left(\frac{\ln x}{x}\right)' = e^{\frac{\ln x}{x}} \cdot \frac{1 - \ln x}{x^2}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x = 0 \Leftrightarrow \ln x = 1 \Leftrightarrow x = e$

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^{\frac{\ln x}{x}} \frac{1 - \ln x}{x^2} > 0 \Leftrightarrow 1 - \ln x > 0 \Leftrightarrow \ln x < 1 \Leftrightarrow 0 < x < e$

x	0	e	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

• $\Delta_1 = [0, e]$

Η f είναι συνεχής και γνησίως αύξουσα στο Δ_1

▹ $f(0) = 0$ και

▹ $f(e) = e^{\frac{1}{e}}$,

$\Rightarrow f(\Delta_1) = \left[0, e^{\frac{1}{e}}\right]$

• $\Delta_2 = (e\,,+\infty)$

$$\left.\begin{array}{l}
\text{Η } f \text{ είναι συνεχής και γνησίως φθίνουσα στο } \Delta_2 \\
\triangleright \ \lim\limits_{x\to e^+} f(x) \overset{f \text{ σχης}}{=} f(e) = e^{\frac{1}{e}} \\
\triangleright \ \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ell nx}{x}} \\
\color{blue}{\text{θέτω } u = \frac{\ell nx}{x} \text{ με } \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ell nx}{x} \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{+\infty}{+\infty}\right)}{=}} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0} \\
\text{άρα } \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{\ell nx}{x}} = \lim\limits_{u\to 0} e^u = e^0 = 1
\end{array}\right\} \Rightarrow f(\Delta_2) = \left(1\,, e^{\frac{1}{e}}\right)$$

Τέλος $f(A) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = \left[0\,, e^{\frac{1}{e}}\right]$

Γ3. i) $f(x) = f(4) \Leftrightarrow e^{\frac{\ell nx}{x}} = e^{\frac{\ell n4}{4}} \overset{e^x\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} \frac{\ell nx}{x} = \frac{\ell n4}{4} \Leftrightarrow$

$4\cdot \ell nx = x\cdot \ell n4 \Leftrightarrow \ell nx^4 = \ell n4^x \overset{\ell nx\ \text{"1-1"}}{\Leftrightarrow} x^4 = 4^x$

Γ3. ii) Οι εξισώσεις $f(x) = f(4)$ και $x^4 = 4^x$ είναι ισοδύναμες.

Η εξίσωση $x^4 = 4^x$ έχει προφανείς ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$, άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει ρίζες τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.

Η f είναι γν. αύξουσα στο Δ_1, άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_1 την $x_1 = 2$.
Η f είναι γν. φθίνουσα στο Δ_2, άρα η εξίσωση $f(x) = f(4)$ έχει μοναδική ρίζα στο Δ_2 την $x_2 = 4$.

Επομένως **η εξίσωση $x^4 = 4^x$, $x > 0$, έχει ακριβώς δύο ρίζες, τις $x_1 = 2$ και $x_2 = 4$.**

Γ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση g, με $g(x) = \left[f(x) - \sqrt{2}\right] \cdot \int_2^x f(t)\,dt$

- g συνεχής στο [2 , 4] ως πράξεις συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο (2 , 4) ως πράξεις παραγωγισίμων

  με $g'(x) = f'(x) \cdot \int_2^x f(t)\,dt + \left[f(x) - \sqrt{2}\right] \cdot f(x)$
- $g(2) = \left[f(2) - \sqrt{2}\right] \cdot \int_2^2 f(t)\,dt = 0$

  $g(4) = \left[f(4) - \sqrt{2}\right] \cdot \int_2^4 f(t)\,dt = 0$, διότι

  $f(4) = e^{\frac{\ell n4}{4}} = e^{\frac{2\ell n2}{4}} = e^{\frac{\ell n2}{2}} = \sqrt{e^{\ell n2}} = \sqrt{2}$.

από Θ.Rolle υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2 , 4)$,

τέτοιο ώστε $g'(\xi) = 0 \Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t)\,dt + \left[f(\xi) - \sqrt{2}\right] \cdot f(\xi) = 0$

$\Leftrightarrow f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t)\,dt = - \left[f(\xi) - \sqrt{2}\right] \cdot f(\xi) \Leftrightarrow$

$f'(\xi) \cdot \int_2^\xi f(t)\,dt = f(\xi) \cdot \left[\sqrt{2} - f(\xi)\right]$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. 1ος τρόπος : Παραγωγίζουμε κατά μέλη τη σχέση

$e^{f(x)} \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right] = x$, για κάθε $x > 0$ **(1)** και έχουμε :

$\left[e^{f(x)} \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right]\right]' = (x)'$

$\left[e^{f(x)}\right]' \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right] + e^{f(x)} \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right]' = 1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right] + e^{f(x)} \cdot \left[2f(x) \cdot f'(x) - 2f'(x)\right] = 1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[f^2(x) - 2f(x) + 3\right] + e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[2f(x) - 2\right] = 1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[f^2(x) - \cancel{2f(x)} + 3 + \cancel{2f(x)} - 2\right] = 1 \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} \cdot f'(x) \cdot \left[f^2(x) + 1\right] = 1 \Leftrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{e^{f(x)} \cdot \left[f^2(x) + 1\right]}$

Είναι $f'(x) > 0$, άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $(0 , +\infty)$,

άρα η f είναι 1-1, άρα **η f αντιστρέφεται**.

Δ1. 2^{ος} τρόπος

$$e^{f(x)}\cdot\left[f^2(x)-2f(x)+3\right]=x, \text{ για κάθε } x>0 \quad \textbf{(1)}$$

$$\text{Έστω } f(x_1)=f(x_2) \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} e^{f(x_1)}=e^{f(x_1)} & \textbf{(2)} \\ f^2(x_1)=f^2(x_2) & \\ -2f(x_1)=-2f(x_2) & \end{cases}$$

$$\left.\begin{array}{l} f^2(x_1)=f^2(x_2) \\ -2f(x_1)=-2f(x_2) \end{array}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} f^2(x_1)-2f(x_1) = f^2(x_2)-2f(x_2) \Rightarrow$$

$$f^2(x_1)-2f(x_1)+3 = f^2(x_2)-2f(x_2)+3 \quad \textbf{(3)}$$

$$(2),(3) \overset{(\cdot)}{\Rightarrow} e^{f(x_1)}\left[f^2(x_1)-2f(x_1)+3\right] = e^{f(x_2)}\left[f^2(x_2)-2f(x_2)+3\right]$$

$$\overset{\textbf{(1)}}{\Leftrightarrow} \quad x_1=x_2$$

άρα η f είναι 1-1, άρα **η f αντιστρέφεται**.

Στην σχέση (1) αν θέσουμε όπου $f(x)=y$, θα έχουμε

$e^y\cdot\left(y^2-2y+3\right)=x$, άρα $f^{-1}(y)=e^y\cdot\left(y^2-2y+3\right)$ ή

$\boldsymbol{f^{-1}(x)=e^x\cdot\left(x^2-2x+3\right),\ x\in IR}=f(A)$

Δ2. $f^{-1}(x)=e^x\cdot\left(x^2-2x+3\right),\ x\in IR$

$$\left(f^{-1}\right)'(x)=\left[e^x\cdot\left(x^2-2x+3\right)\right]'=e^x\cdot\left(x^2-2x+3\right)+e^x\cdot(2x-2)$$

$$=e^x\cdot\left(x^2-2x+3+2x-2\right)=e^x\cdot\left(x^2+1\right)$$

$$\left(f^{-1}\right)''(x)=\left[e^x\cdot\left(x^2+1\right)\right]'=e^x\cdot\left(x^2+1\right)+e^x\cdot 2x$$

$$=e^x\cdot\left(x^2+2x+1\right)=e^x\cdot(x+1)^2\geq 0$$

και το "=" ισχύει μόνο για $x=-1$

Άρα **η f^{-1} είναι κυρτή στο IR**.

$f^{-1}(0) = e^0 \cdot (0^2 - 2 \cdot 0 + 3) = 3$

$(f^{-1})'(0) = e^0 \cdot (0^2 + 1) = 1$

$\varepsilon : y - f^{-1}(0) = (f^{-1})'(0) \cdot (x - 0) \quad \Leftrightarrow \quad y - 3 = x \quad \Leftrightarrow \quad y = x + 3$

η εφαπτομένη της $C_{f^{-1}}$ στο σημείο της Α (0 , 3)

Η f^{-1} είναι κυρτή στο IR, άρα

η $C_{f^{-1}}$ βρίσκεται πάνω από την (ε)

με εξαίρεση το σημείο επαφής Α.

$$E = \int_0^1 \left[f^{-1}(x) - (x+3) \right] dx = \int_0^1 \left[e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) - (x+3) \right] dx$$

$$= \int_0^1 e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)\, dx - \int_0^1 (x+3)\, dx$$

$$= \int_0^1 (e^x)' \cdot (x^2 - 2x + 3)\, dx - \left[\frac{x^2}{2} + 3x \right]_0^1$$

$$= \left[e^x \cdot (x^2 - 2x + 3) \right]_0^1 - \int_0^1 e^x \cdot (x^2 - 2x + 3)'\, dx - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - \int_0^1 e^x \cdot (2x - 2)\, dx - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - \int_0^1 (e^x)' \cdot (2x - 2)\, dx - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - \left[e^x \cdot (2x - 2) \right]_0^1 + \int_0^1 e^x \cdot (2x - 2)'\, dx - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - 2 + 2\left[e^x \right]_0^1 - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - 2 + 2\left[e^x \right]_0^1 - \frac{1}{2} - 3$$

$$= 2e - 3 - 2 + 2e - 2 - \frac{1}{2} - 3$$

$$= \left(4e - \frac{21}{2} \right) \text{τ.μ.}$$

Δ3. i) $1^{ος}$ τρόπος

$$\lambda_1 = \left(f^{-1}\right)'(x) = e^x \cdot \left(x^2 + 1\right)$$

$$\lambda_2 = f'\left(f^{-1}(x)\right) = \frac{1}{e^{f\left(f^{-1}(x)\right)} \cdot \left[\left(f\left(f^{-1}(x)\right)^2 + 1\right)\right]} = \frac{1}{e^x \cdot \left(x^2 + 1\right)}$$

Επομένως $\boldsymbol{\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 1}$

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $f\left(f^{-1}(x)\right) = x$, για κάθε $x \in IR$

Παραγωγίζουμε κατά μέλη και έχουμε :

$$f'\left(f^{-1}(x)\right) \cdot \left(f^{-1}\right)'(x) = (x)' \quad \Leftrightarrow \quad \boldsymbol{\lambda_2 \cdot \lambda_1 = 1}$$

Δ3. ii) $(AB) = d\,(x) = \sqrt{\left(x - f^{-1}(x)\right)^2 + \left(f^{-1}(x) - x\right)^2} = \sqrt{2\left(f^{-1}(x) - x\right)^2}$

$1^{ος}$ τρόπος

Έχουμε αποδείξει ότι $f^{-1}(x) - (x + 3) \geq 0$, για κάθε $x \in IR \Leftrightarrow$

$f^{-1}(x) - x \geq 3$, για κάθε $x \in IR$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = 0$

$$(AB) = d\,(x) = \sqrt{2\left(f^{-1}(x) - x\right)^2} = \sqrt{2} \cdot \left(f^{-1}(x) - x\right) \geq 3\sqrt{2}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Θεωρώ τη συνάρτηση g, με $g\,(x) = f^{-1}(x) - x$, $x \in IR$

Είναι $g'(x) = \left(f^{-1}\right)'(x) - 1$

και $g''(x) = \left(f^{-1}\right)''(x) \geq 0$ και το "=" ισχύει μόνο για $x = -1$

άρα η g' είναι γνησίως αύξουσα και επειδή $g'(0) = 0$

η g' έχει μοναδική ρίζα το 0.

$$g'(x) > 0 \quad \Leftrightarrow \quad g'(x) > g'(0) \quad \overset{g'\uparrow}{\Leftrightarrow} \quad x > 0$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

Είναι $g(x) \geq g(0) \iff g(x) \geq 3$

άρα $(AB) = d(x) = \sqrt{2g^2(x)} = g(x) \cdot \sqrt{2} \geq 3\sqrt{2}$

Επομένως **η απόσταση AB γίνεται ελάχιστη όταν $x = 0$ και η ελάχιστη αυτή απόσταση είναι $d_{min} = 3\sqrt{2}$**