ΤΑΞΗ: Γ΄ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ: ΘΕΤΙΚΗ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Ημερομηνία: Κυριακή 27 Απριλίου 2014
Διάρκεια Εξέτασης: 3 ώρες

ΕΚΦΩΝΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $f(x)=x^{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}-\{0,1\}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ και ισχύει $f'(x)=\nu x^{\nu-1}$.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία $y=\lambda x+\beta$ λέγεται ασύμπτωτη της γραφικής παράσταση μιας συνάρτησης f στο $+\infty$;

Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το κριτήριο παρεμβολής.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη:*

i) Αν μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το Α έχει αντίστροφη, τότε $f^{-1}(f(x))=x$, για κάθε $x\in A$.

Μονάδες 2

ii) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)>0$, τότε $f(x)>0$ κοντά στο x_0.

Μονάδες 2

iii) Αν μια συνάρτηση f δεν είναι συνεχής στο σημείο x_0, τότε δεν είναι παραγωγίσιμη σ' αυτό.

Μονάδες 2

iv) Μια συνεχής στο (α, β) συνάρτηση, παίρνει σε κάθε περίπτωση στο (α, β) μια μέγιστη και μια ελάχιστη τιμή.

Μονάδες 2

v) Αν f συνεχής συνάρτηση στο [α, β] και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε $\int_\alpha^\beta \lambda f(x)dx=\lambda\int_\alpha^\beta f(x)dx$.

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι μιγαδικοί z, z_1 και w με $z = \alpha + \beta i$, με $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ τέτοιοι, ώστε ο

$z_1 = \dfrac{1+(\beta-2)i}{\alpha+2-i}$ να είναι φανταστικός και $\left|(1-i)\,\mathrm{Im}\left(w - \dfrac{1}{2}i\right)\right| = \sqrt{2}\left|w + \dfrac{1}{2}i\right|$.

Β1. Να αποδείξετε ότι:

α) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο είναι η ευθεία ε με εξίσωση $x - y + 4 = 0$.

Μονάδες 6

β) Ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του w στο μιγαδικό επίπεδο είναι η παραβολή με εξίσωση $x^2 + 2y = 0$.

Μονάδες 6

Β2. Να αποδείξετε ότι $|z - w| \geq \dfrac{7\sqrt{2}}{4}$.

Μονάδες 5

Β3. **α)** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των εικόνων του $\overline{w}$ στο μιγαδικό επίπεδο.

Μονάδες 3

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου, που περικλείεται από την ευθεία $x - y + 4 = 0$ και την γραμμή C του προηγούμενου ερωτήματος.

Μονάδες 5

ΘΕΜΑ Γ

Οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$ με $f(1) = 1$, $g(1) = 0$ και ικανοποιούν τις σχέσεις: $f'(x) - f(x) = e^x g'(x) - 1$ και $2f(x) + x^2 - 2x \geq 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f(x) = e^x g(x) + 1$.

Μονάδες 6

Γ2. **α)** Να υπολογίσετε το $g'(1)$.

Μονάδες 3

β) Να αποδείξετε ότι $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[(x+1)\,g\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)\right] = 0$.

Μονάδες 4

Γ3. Αν, επιπλέον $g(x)=(x-1)^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$, τότε

α) Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

Μονάδες 6

β) Να αποδείξετε ότι, για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, από το σημείο Μ(1, λ) άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη γραφική παράσταση της συνάρτησης h με $h(x)=e^x(1-x)+1$.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Δ

Η συνάρτηση g είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2 e^{t^2}\,dt < g''(x)\, e^{[g''(x)]^2} - g''(x),\ \text{για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

και

$$g(2)=-2,\ \int_{-2}^{g(0)} e^{t^2}dt\cdot\int_{-2}^{g(1)} e^{t^2}dt<0\ .$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα.

Μονάδες 6

Δ2. Να αποδείξετε ότι υπάρχει $\rho\in(0,1)$, τέτοιο, ώστε $g(\rho)=-2$ (μονάδες 5) και $g'(\rho)<0<g'(2)$ (μονάδες 3).

Μονάδες 8

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x\to 2} g\left(\dfrac{x-3}{g(x)+2}\right)$.

Μονάδες 6

Δ4. Να λύσετε την εξίσωση $g(1+x-x^3)=g(1)+g(x)-g(x^3)$, $x>0$.

Μονάδες 5

Ευχόμαστε Επιτυχία

αφού

$$\lim_{x\to-\infty}\left[e^x(x-1)^2\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{(x-1)^2}{e^{-x}}\underset{DLH}{\overset{\frac{+\infty}{+\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{\left[(x-1)^2\right]'}{\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)}{-e^{-x}}$$

$$\underset{DLH}{\overset{\frac{-\infty}{-\infty}}{=}}\lim_{x\to-\infty}\frac{2(x-1)'}{-\left(e^{-x}\right)'}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2}{e^{-x}}=\lim_{x\to-\infty}2e^x=0$$

Ακόμη

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left[e^x(x-1)^2+1\right]=+\infty,$$

αφού

$$\lim_{x\to+\infty}(x-1)^2=+\infty \quad \text{και} \quad \lim_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$$

Επομένως η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο για $x=-1$ το $f(-1)=\frac{4}{e}+1$ και ολικό ελάχιστο για $x=1$ το $f(1)=1$. Αν

$$A_1=(-\infty,-1),\quad A_2=[-1,1] \text{ και } A_3=(1,+\infty),$$

τότε

$$f(A_1)=\left(\lim_{x\to-\infty}f(x),\frac{4}{e}+1\right)=\left(1,\frac{4}{e}+1\right),$$

$$f(A_2)=\left[f(1),f(-1)\right]=\left[1,\frac{4}{e}+1\right] \text{ και}$$

$$f(A_3)=\left(1,\lim_{x\to+\infty}f(x)\right)=(1,+\infty).$$

Επομένως το σύνολο τιμών της f είναι το

$$f(\mathbb{R})=f(A_1)\cup f(A_2)\cup f(A_3)=[1,+\infty)$$

β) Η $h(x)=e^x(1-x)+1,\ x\in\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με

$$h'(x)=\left[e^x(1-x)+1\right]'=e^x(1-x)-e^x=-xe^x,\ x\in\mathbb{R}$$

Έστω ε η εφαπτομένη που φέρουμε στη C_h από το σημείο $M(1,\lambda)$ και $(x_0,h(x_0))$ το σημείο επαφής. Η εξίσωση της εφαπτομένης είναι

$$y-h(x_0)=h'(x_0)(x-x_0),$$

η οποία γράφεται

$$y-e^{x_0}(1-x_0)-1=-x_0e^{x_0}(x-x_0)$$

Επειδή το $M(1,\lambda)$ είναι σημείο της εφαπτομένης, για $x=1$ και $y=\lambda$ η τελευταία σχέση δίνει

$$\lambda - e^{x_0}(1-x_0)-1=-x_0e^{x_0}(1-x_0) \Leftrightarrow \lambda = 1+e^{x_0}(1-x_0-x_0+x_0{}^2)$$
$$\Leftrightarrow e^{x_0}(x_0-1)^2+1=\lambda$$
$$\Leftrightarrow f(x_0)=\lambda$$

Όπως δείξαμε στο προηγούμενο ερώτημα, η f είναι γνησίως μονότονη σε καθένα από τα διαστήματα A_1, A_2, A_3, οπότε η εξίσωση f(x) = λ, έχει το πολύ μία λύση σε καθένα από αυτά και, συνεπώς, συνολικά έχει το πολύ τρεις λύσεις στο $\mathbb{R}$. Αυτό αποδεικνύει, ότι από το σημείο $M(1, \lambda)$ άγονται το πολύ τρεις εφαπτόμενες στη C_h.

2ος τρόπος απόδειξης, ότι η εξίσωση f(x) = λ έχει το πολύ τρεις ρίζες. Υποθέτουμε ότι έχει τέσσερις διαφορετικές ρίζες τις $\rho_1,\rho_2,\rho_3,\rho_4$ και έστω χωρίς βλάβη της γενικότητας $\rho_1<\rho_2<\rho_3<\rho_4$. Αυτές είναι ρίζες και της συνάρτησης

$$\varphi(x)=f(x)-\lambda$$

Η φ είναι συνεχής σε καθένα από τα διαστήματα $[\rho_1, \rho_2]$, $[\rho_2, \rho_3]$, $[\rho_3, \rho_4]$ και παραγωγίσιμη σε καθένα από τα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$ με $\varphi'(x)=f'(x)$ και ακόμα

$$\varphi(\rho_1)=\varphi(\rho_2)=\varphi(\rho_3)=\varphi(\rho_4)=0$$

Άρα εφαρμόζεται το θεώρημα Rolle σε καθένα από τα διαστήματα $(\rho_1,\rho_2),(\rho_2,\rho_3),(\rho_3,\rho_4)$, όποτε υπάρχουν $\kappa_1\in(\rho_1,\rho_2)$, $\kappa_2\in(\rho_2,\rho_3)$, $\kappa_3\in(\rho_3,\rho_4)$ τέτοια, ώστε

$$\varphi'(\kappa_1)=\varphi'(\kappa_2)=\varphi'(\kappa_3)=0$$

Προφανώς $\kappa_1<\kappa_2<\kappa_3$. Επειδή $\varphi'(x)=f'(x)$ προκύπτει ότι η εξίσωση $f'(x)=0$ έχει τρεις διαφορετικές ρίζες, τις $\kappa_1,\kappa_2,\kappa_3$, που είναι άτοπο, διότι, όπως αποδείχτηκε στο προηγούμενο ερώτημα, έχει δύο ακριβώς δύο ρίζες τις $x=1, x=-1$.

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Θεωρούμε την συνάρτηση $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$h(x)=\int_0^x 2t^2e^{t^2}dt - xe^{x^2}+x$$

Η h είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με παράγωγο

$$h'(x)=2x^2e^{x^2}-\left(e^{x^2}+2x^2e^{x^2}\right)+1=1-e^{x^2}$$

Η h΄ μηδενίζεται για x = 0 και για κάθε x ≠ 0 είναι

$$x^2>0 \Leftrightarrow e^{x^2}>1 \Leftrightarrow 1-e^{x^2}<0 \Leftrightarrow h'(x)<0$$

Επομένως, η h είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$, οπότε έχουμε:

$$h(x)<0 \Leftrightarrow h(x)<h(0) \Leftrightarrow x>0 \quad (1)$$

Η πρώτη από τις δοσμένες ανισότητες για κάθε $x\in\mathbb{R}$ δίνει:

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2e^{t^2}dt - g''(x)e^{[g''(x)]^2}+g''(x)<0$$

ή $h(g''(x))<0$ και λόγω της (1): $g''(x)>0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

2^{ος} τρόπος

Με ολοκλήρωση κατά παράγοντες έχουμε:

$$\int_0^{g''(x)} 2t^2e^{t^2}dt < g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} t\left(e^{t^2}\right)'dt < g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow \left[te^{t^2}\right]_0^{g''(x)} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2}dt < g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow g''(x)e^{[g''(x)]^2} - \int_0^{g''(x)} e^{t^2}dt < g''(x)e^{[g''(x)]^2}-g''(x)$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} e^{t^2}dt > g''(x) \qquad (1^*)$$

Και τώρα συνεχίζουμε ως εξής:

$$(1^*) \Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} e^{t^2}dt > \int_0^{g''(x)} dt$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} e^{t^2}dt - \int_0^{g''(x)} dt > 0$$

$$\Leftrightarrow \int_0^{g''(x)} \left(e^{t^2}-1\right)dt > 0 \qquad (2^*)$$

Επειδή $e^{t^2}-1\geq 0$, για κάθε $t\in\mathbb{R}$, η (2*) αποκλείει $g''(x)\leq 0$, αφού τότε θα είχαμε $\int_{g''(x)}^{0}\left(e^{t^2}-1\right)dt\geq 0 \Leftrightarrow \int_0^{g''(x)}\left(e^{t^2}-1\right)dt\leq 0$, άτοπο. Επομένως $g''(x)>0$, που σημαίνει ότι η g' είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Δ2. Θεωρούμε την συνάρτηση f με

$$f(x)=\int_{-2}^{g(x)} e^{t^2}dt, \quad x\in[0,1]$$

Η f είναι συνεχής, ως σύνθεση των συνεχών συναρτήσεων g και g_1 με $g_1(x)=\int_{-2}^{x} e^{t^2}dt$. Ακόμα

$$f(0)f(1)=\int_{-2}^{g(0)} e^{t^2}dt \int_{-2}^{g(1)} e^{t^2}dt<0$$

Επομένως, από το Θεώρημα του Bolzano υπάρχει ρ∈(0, 1) τέτοιο ώστε f(ρ) = 0 ή

$$\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt=0 \quad (2)$$

- Αν g(ρ) > – 2, επειδή $e^{t^2}>0$ θα είναι $\int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt>0$ άτοπο από την (2).
- Αν g(ρ) < – 2 επειδή $e^{t^2}>0$ θα είναι $\int_{g(\rho)}^{-2} e^{t^2}dt>0 \Leftrightarrow \int_{-2}^{g(\rho)} e^{t^2}dt<0$, ομοίως άτοπο από την (2).

Επομένως g(ρ) = – 2.
Στη συνέχεια, εφαρμόζεται το Θεώρημα του Rolle για την g στο διάστημα [ρ, 2], αφού ως παραγωγίσιμη είναι συνεχής στο [ρ, 2], παραγωγίσιμη στο (ρ, 2) και ακόμα g(ρ) = g(2) = – 2. Επομένως, υπάρχει $x_0\in(\rho,2)$ τέτοιο, ώστε

$$g'(x_0)=0 \quad (3)$$

Αλλά η g΄ είναι γνησίως αύξουσα οπότε:

$$\rho<x_0<2\Rightarrow g'(\rho)<g'(x_0)<g'(2)\Rightarrow g'(\rho)<0<g'(2)$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

Δ3. Έστω $x_0<x<2$. Θέτουμε

$$u=\frac{x-3}{g(x)+2}$$

Είναι $\lim_{x\to 2^-}u=\lim_{x\to 2^-}\frac{x-3}{g(x)+2}=+\infty$ διότι:

- $\lim_{x\to 2^-}(x-3)=-1<0$
- $\lim_{x\to 2^-}\left[g(x)+2\right]=0$
- g(x) + 2 < 0, γιατί από την μονοτονία της g΄ είναι
$$x>x_0\Rightarrow g'(x)>g'(x_0)\Rightarrow g'(x)>0,$$

που σημαίνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[x_0,+\infty)$. Έτσι

$$x_0<x<2\Rightarrow g(x)<g(2)\Rightarrow g(x)<-2\Rightarrow g(x)+2<0$$

Στη συνέχεια το ζητούμενο όριο γίνεται

$$\lim_{x\to 2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)=\lim_{u\to+\infty} g(u)$$

Η εφαπτομένη της C_g στο σημείο της Μ(2, g(2)) έχει εξίσωση:

$$y-g(2)=g'(2)(x-2) \Leftrightarrow y=g'(2)x-2g'(2)+g(2)$$

Επειδή η g΄ είναι γνησίως αύξουσα η g είναι κυρτή στο $\mathbb{R}$, οπότε τα σημεία της C_g είναι πάνω από τα αντίστοιχα σημεία της εφαπτομένης της, εκτός του σημείου επαφής, επομένως για κάθε $x \in \mathbb{R}$

$$g(x) \geq g'(2)x-2g'(2)+g(2) \quad (4)$$

Επειδή $g'(2)>0$ είναι

$$\lim_{x\to+\infty}\left[g'(2)x-2g'(2)+g(2)\right]=\lim_{x\to+\infty}\left[g'(2)x\right]=+\infty$$

Αν $h(x)=g'(2)x-2g'(2)+g(2)$, με $x \in \mathbb{R}$ αφού $\lim_{x\to+\infty} h(x)=+\infty$ θα υπάρχει $\alpha>0$, ώστε στο $(\alpha,+\infty)$ είναι $h(x)>0$ οπότε από (4) είναι

$$g(x) \geq h(x)>0 \Leftrightarrow 0<\frac{1}{g(x)} \leq \frac{1}{h(x)}$$

Επειδή $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{h(x)}=0$, από κριτήριο παρεμβολής θα είναι $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{g(x)}=0$.

Αν $\varphi(x)=\frac{1}{g(x)} \Leftrightarrow g(x)=\frac{1}{\varphi(x)}$, τότε

$$\lim_{x\to+\infty} g(x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\varphi(x)}=+\infty \Rightarrow \lim_{u\to+\infty} g(u)=+\infty,$$

διότι είναι $\varphi(x)>0$ στο $(\alpha,+\infty)$ και $\lim_{x\to+\infty}\varphi(x)=0$.

Ώστε

$$\lim_{x\to2^-} g\left(\frac{x-3}{g(x)+2}\right)=\lim_{u\to+\infty} g(u)=+\infty$$

Δ4. Η εξίσωση έχει προφανή ρίζα την x = 1. Θα αποδείξουμε ότι είναι μοναδική. Πραγματικά είναι:

$$g(1+x-x^3)=g(1)+g(x)-g(x^3) \Leftrightarrow g(1+x-x^3)-g(1)=g(x)-g(x^3) \quad (5)$$

- Αν υποθέσουμε ότι x > 1, τότε θεωρούμε τα διαστήματα $[1+x-x^3,\ 1]$ και $[x,\ x^3]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $1<x<x^3$ και $1+x-x^3<1 \Leftrightarrow x<x^3$, δηλαδή

$$1+x-x^3<1<x<x^3.$$

Εφαρμόζεται, τώρα, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1+x-x^3,\ 1]$ και $[x,\ x^3]$, γιατί η g είναι συνεχής σ’ αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$1+x-x^3<\xi_1<1<x<\xi_2<x^3, \qquad (6)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1)-g(1+x-x^3)}{x^3-x}=g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x^3)-g(x)}{x^3-x}=g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$-g'(\xi_1)=-g'(\xi_2)\Rightarrow g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (6) και την μονοτονία της g΄ είναι
$\xi_1<\xi_2\Rightarrow g'(\xi_1)<g'(\xi_2)$

- Πάλι, αν υποθέσουμε ότι 0 < x < 1, τότε εργαζόμαστε στα διαστήματα $[1,\ 1+x-x^3]$ και $[x^3,\ x]$. Αυτά είναι καλώς ορισμένα και ξένα μεταξύ τους, αφού ισχύουν $x^3<x<1$ και $1<1+x-x^3 \Leftrightarrow x^3<x$, δηλαδή

$$x^3<x<1<1+x-x^3$$

Εφαρμόζεται, ομοίως, για την g το θεώρημα μέσης τιμής σε καθένα από τα $[1,\ 1+x-x^3]$ και $[x^3,\ x]$, γιατί η g είναι συνεχής σ’ αυτά και παραγωγίσιμη στα αντίστοιχα ανοιχτά διαστήματα. Υπάρχουν, επομένως, ξ_1, ξ_2 με

$$x^3<\xi_2<x<1<\xi_1<1+x-x^3, \qquad (7)$$

τέτοια ώστε

$$\frac{g(1+x-x^3)-g(1)}{x-x^3}=g'(\xi_1) \quad \text{και} \quad \frac{g(x)-g(x^3)}{x-x^3}=g'(\xi_2)$$

Λόγω της (5):

$$g'(\xi_1)=g'(\xi_2)$$

Άτοπο, γιατί από την (7) και την μονοτονία της g΄ είναι
$\xi_2<\xi_1\Rightarrow g'(\xi_2)<g'(\xi_1)$.
Ώστε η εξίσωση έχει μοναδική λύση την προφανή x = 1.