ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ
(ΟΜΑΔΑ Α΄)
ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ
ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι

ΗΜΕΡΗΣΙΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Για μία συνεχή συνάρτηση f να γράψετε τις τρεις κατηγορίες σημείων, τα οποία είναι πιθανές θέσεις τοπικών ακροτάτων.

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή ή τη λέξη **Λάθος,** αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Η επικρατούσα τιμή μίας μεταβλητής είναι μοναδική.

(Μον. 2)

β) Έστω συνεχής συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ και x_0 ένα στάσιμο σημείο της f (δηλαδή $f'(x_0) = 0$). Αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0, τότε παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο x_0 όταν $f''(x_0) < 0$.

(Μον. 2)

γ) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο $[\alpha, \beta]$. Τότε ισχύει:

$$\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)dx = \alpha, \text{ όπου } \alpha \in \mathbb{R}^*$$

(Μον. 2)

δ) Αν οι συναρτήσεις $f,\ g : A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμες στο πεδίο ορισμού τους A, τότε και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο A και ισχύει:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)$$

(Μον. 2)

ε) Η σχετική συχνότητα τιμής x_i μίας μεταβλητής συμβολίζεται με f_i και ισχύει $f_i = \frac{\nu_i}{\nu}$.

(Μον. 2)

Μονάδες 10

Α3. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τις παρακάτω ισότητες και να τις συμπληρώσετε:

α) $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x} dx = \cdots$, με $\beta > \alpha > 0$

(Μον. 3)

β) $(c)' = \cdots$, αν c σταθερά

(Μον. 3)

γ) Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_k$ με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_k$ τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι: $\bar{x} =$...

(Μον. 3)

Μονάδες 9

ΘΕΜΑ Β

Οι χρόνοι (σε λεπτά) 50 μαθητών της Γ΄τάξης ενός ΕΠΑ.Λ για να γράψουν ένα διαγώνισμα, δίνονται στον παρακάτω πίνακα κατανομής:

Χρόνος σε λεπτά	**Κέντρο κλάσης κ_i**	**Συχνότητα ν_i**	**Αθροιστική Συχνότητα N_i**	$\boldsymbol{\kappa_i \cdot \nu_i}$
[5 – 15)		20		
[15 – 25)			34	
[25 – 35)		12		
[35 – 45)				
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		

Β1. Να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον προηγούμενο πίνακα και να τον συμπληρώσετε σωστά.

Μονάδες 7

Β2. Να υπολογίσετε τη μέση τιμή $\bar{x}$ του χρόνου, που χρειάστηκαν οι μαθητές για να γράψουν το διαγώνισμα.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη διακύμανση s^2 (Μον. 7) και την τυπική απόκλιση s της μεταβλητής (Μον. 2).

Μονάδες 9

Β4. Να υπολογίσετε τον συντελεστή μεταβλητότητας CV%.

Μονάδες 4

(Δίνεται: $\sqrt{96} \approx 10$)

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 8}{\lambda x - 2\lambda} & , \quad αν \;\; x > 2 \\ \\ 4x + 4e^{x-2}, & αν \;\; x \leq 2 \end{cases}$$

όπου $\lambda \in \mathbb{R}^*$.

Γ1. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \to 2^-} f(x)$$

Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε το:

$$\lim_{x \to 2^+} f(x)$$

Μονάδες 8

Γ3. Να βρείτε για ποιές τιμές του λ η συνάρτηση είναι συνεχής στο $x_0 = 2$.

Μονάδες 6

Γ4. Για λ=1 να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα $\int_1^2 f(x)dx$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Μία ομάδα περιβαλλοντολόγων εκτιμά ότι το βάρος B (B σε τόνους) ενός παγόβουνου μεταβάλλεται με τον χρόνο t (t σε έτη) σύμφωνα με τη συνάρτηση:

$$B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15, \quad 0 \le t \le 10$$

Δ1. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου.

Μονάδες 5

Δ2. Ποιά χρονική στιγμή το βάρος του παγόβουνου γίνεται μέγιστο;

Μονάδες 8

Δ3. Να αποδείξετε ότι, αν $t \in [6, 9]$, τότε ισχύει:

$$B(9) \le B(t) \le B(6)$$

Μονάδες 5

Δ4. Ποιά χρονική στιγμή ο ρυθμός μεταβολής του βάρους του παγόβουνου γίνεται μέγιστος;

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟΥΣ

1. Στο τετράδιο να γράψετε μόνο τα προκαταρκτικά (ημερομηνία, εξεταζόμενο μάθημα). **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Δεν επιτρέπεται να γράψετε** καμιά άλλη σημείωση. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα, **μόνο με μπλε ή μαύρο στυλό ανεξίτηλης μελάνης**.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Ώρα δυνατής αποχώρησης: **10.00 π.μ.**

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Α΄) ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΩΝ ΕΙΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΕΠΑΓΓΕΛΜΑΤΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΠΕΜΠΤΗ 21 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Ι (ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Θεωρία σχολικού βιβλίου σελίδα 212

Α2. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

Α3. α. $\int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{x}\,dx = \left[\ell n x\right]_{\alpha}^{\beta} = \ell n\beta - \ell n\alpha = \ell n\frac{\beta}{\alpha}$

β. $(c)' = 0$, αν c σταθερά

γ. Αν η μεταβλητή x παίρνει τις τιμές $x_1, x_2, \ldots, x_\kappa$ με αντίστοιχες συχνότητες $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_\kappa$, τότε η μέση τιμή της μεταβλητής είναι $\bar{x} = \frac{x_1\nu_1 + x_2\nu_2 + \ldots + x_\kappa\nu_\kappa}{\nu_1 + \nu_2 + \ldots + \nu_\kappa}$.

ΘΕΜΑ Β

Β1.

Κλάσεις	κ_i	ν_i	N_i	$\kappa_i \cdot \nu_i$
[5 , 15)	10	20	20	200
[15 , 25)	20	14	34	280
[25 , 35)	30	12	46	360
[35 , 45)	40	4	50	160
ΣΥΝΟΛΑ		$\nu = 50$		**1000**

Β2. $\bar{x} = \dfrac{\kappa_1\nu_1 + \kappa_2\nu_2 + \kappa_3\nu_3 + x_4\nu_4}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} = \dfrac{1000}{500} =$ **20 λεπτά**

Β3.

Κλάσεις	κ_i	ν_i	$\bar{x} - \kappa_i$	$(\bar{x} - \kappa_i)^2$	$\nu_i \cdot (\bar{x} - \kappa_i)^2$
[5 , 15)	10	20	10	100	2000
[15 , 25)	20	14	0	0	0
[25 , 35)	30	12	-10	100	1200
[35 , 45)	40	4	-20	400	1600
ΣΥΝΟΛΑ		ν = 50			**4800**

$$s^2 = \frac{\nu_1 \cdot (\bar{x} - \kappa_1)^2 + \nu_2 \cdot (\bar{x} - \kappa_2)^2 + \nu_3 \cdot (\bar{x} - \kappa_3)^2 + \nu_4 \cdot (\bar{x} - \kappa_4)^2}{\nu_1 + \nu_2 + \nu_3 + \nu_4} \Leftrightarrow$$

$$s^2 = \frac{4800}{50} \Leftrightarrow$$

$s^2 =$ **96**

$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{96} \approx$ **10 λεπτά**

Β4. $CV = \dfrac{s}{\bar{x}} \cdot 100\% = \dfrac{10}{20} \cdot 100\% =$ **50%**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $\lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^3-8}{\lambda x-2\lambda} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{\cancel{(x-2)}(x^2+2x+4)}{\lambda\cancel{(x-2)}} = \lim\limits_{x\to 2^-}\dfrac{x^2+2x+4}{\lambda} = \mathbf{\dfrac{12}{\lambda}}$

Γ2. $\lim\limits_{x\to 2^+}(4x+4e^{x-2}) = 8+4e^0 = 8+4 = \mathbf{12}.$

Γ3. Για να είναι η f συνεχής στο $x_0 = 2$, πρέπει

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^+} f(x) = f(2) \Leftrightarrow \frac{12}{\lambda} = 12 \Leftrightarrow \boldsymbol{\lambda = 1}$$

Γ4. Για $\lambda = 1$, είναι $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3-8}{x-2}, & \text{αν } x > 2 \\ 4x+4\cdot e^{x-2}, & \text{αν } x \le 2 \end{cases}$

$$\begin{aligned}
\int_1^2 f(x)\,dx &= \int_1^2 (4x+4\cdot e^{x-2})\,dx \\
&= \int_1^2 4x\,dx + 4\int_1^2 e^{x-2}\,dx \\
&= \left[2x^2\right]_1^2 + 4\cdot\left[e^{x-2}\right]_1^2 \\
&= (8-2) + 4(e^0 - e^{-1}) \\
&= 6 + 4\left(1 - \frac{1}{e}\right) \\
&= 6 + 4 - \frac{4}{e} \\
&= \mathbf{10 - \frac{4}{e}}
\end{aligned}$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. $B(t) = -\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15,\ 0 \le t \le 10$

$$B'(t) = \left(-\frac{t^3}{3} + 2t^2 + 12t + 15\right)' \Leftrightarrow$$

$$\mathbf{B'(t) = -t^2 + 4t + 12,\ 0 \le t \le 10}$$

Δ2. $B'(t) = 0 \Leftrightarrow -t^2 + 4t + 12 = 0$

$\Delta = 4^2 - 4\cdot(-1)\cdot 12 = 16 + 48 = 64$

$$t = \frac{-4 \pm 8}{-2} = \begin{cases} -2 \\ 6 \end{cases}$$

t	$-\infty$		-2		0		6		10		$+\infty$
$-t^2 + 4t + 12$		$-$	○	$+$		$+$	○	$-$		$-$	
$B'(t)$						$+$	○	$-$			
$B(t)$						$\nearrow$		$\searrow$			

Το βάρος γίνεται μέγιστο τη χρονική στιγμή $t_1 = 6$ έτη.

Δ3. Αν $6 \le t \le 9$, επειδή η συνάρτηση B
είναι γνησίως φθίνουσα στο διάστημα $[6, 10]$
θα είναι $B(6) \ge B(t) \ge B(9)$ ή

$$\mathbf{B(9) \le B(t) \le B(6)}$$

Δ4. $B'(t) = -t^2 + 4t + 12,\ 0 \le t \le 10$

$$B''(t) = \left(-t^2 + 4t + 12\right)' = -2t + 4,\quad 0 \le t \le 10$$

$$B''(t) = 0 \iff -2t + 4 = 0 \iff t = 2$$

t	0		2		10
$B''(t)$		$+$	0	$-$	
$B'(t)$		↗		↘	

Ο ρυθμός μεταβολής του βάρους γίνεται μέγιστος τη χρονική στιγμή $t_2 = 2$ έτη.