ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: 5(ΠΕΝΤΕ)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν οι συναρτήσεις f, g είναι παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι

$$\left(f(x)+g(x)\right)' = f'(x)+g'(x),\ x\in\mathbb{R}$$

Μονάδες 7

Α2. Πότε λέμε ότι μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της;

Μονάδες 4

Α3. Αν $x_1, x_2, ..., x_v$ είναι οι παρατηρήσεις μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ ενός δείγματος μεγέθους v και $w_1, w_2, ..., w_v$ είναι οι αντίστοιχοι συντελεστές στάθμισης (βαρύτητας), να ορίσετε τον σταθμικό μέσο της μεταβλητής Χ.

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη* ***Σωστό****, αν η πρόταση είναι σωστή, ή* ***Λάθος****, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για τη συνάρτηση f ισχύουν $f'(x_0)=0$ για $x_0\in(\alpha,\beta)$, $f'(x)>0$ στο (α,x_0) και $f'(x)<0$ στο (x_0,β), τότε η f παρουσιάζει ελάχιστο στο διάστημα (α,β) για $x=x_0$.

β) Ένα τοπικό ελάχιστο μιας συνάρτησης στο πεδίο ορισμού της μπορεί να είναι μεγαλύτερο από ένα τοπικό μέγιστο.

γ) Η διακύμανση των παρατηρήσεων μιας ποσοτικής μεταβλητής Χ εκφράζεται με τις ίδιες μονάδες με τις οποίες εκφράζονται οι παρατηρήσεις.

δ) Αν για τους συντελεστές μεταβολής των δειγμάτων A και B ισχύει $CV_B > CV_A$, τότε λέμε ότι το δείγμα B εμφανίζει μεγαλύτερη ομοιογένεια από το δείγμα A.

ε) Αν A, B είναι ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω, τότε η έκφραση «η πραγματοποίηση του A συνεπάγεται την πραγματοποίηση του B» δηλώνει ότι $A \subseteq B$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Έστω A, B και Γ ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Οι πιθανότητες των ενδεχομένων A, $A \cap B$ και $A \cup B$ ανήκουν στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$(3x-1)\cdot(8x^2-6x+1)=0.$$

Η πιθανότητα του ενδεχομένου Γ ανήκει στο σύνολο λύσεων της εξίσωσης

$$9x^2-3x-2=0.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι $P(A)=\frac{1}{3}$, $P(A\cap B)=\frac{1}{4}$ και $P(A\cup B)=\frac{1}{2}$.

Μονάδες 5

Β2. Να υπολογίσετε την πιθανότητα $P(A'-B')$, καθώς επίσης και την πιθανότητα του ενδεχομένου

Δ: «πραγματοποιείται το πολύ ένα από τα ενδεχόμενα A και B».

Μονάδες 8

Β3. Να υπολογίσετε την πιθανότητα του ενδεχομένου
Ε: «πραγματοποιείται μόνο ένα από τα ενδεχόμενα A και B».

Μονάδες 6

Β4. Να εξετάσετε αν τα ενδεχόμενα B και Γ είναι ασυμβίβαστα.

Μονάδες 6

ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε ένα δείγμα ν παρατηρήσεων μιας συνεχούς ποσοτικής μεταβλητής X, τις οποίες ομαδοποιούμε σε 5 ισοπλατείς κλάσεις, όπως παρουσιάζονται στον **Πίνακα Ι**, όπου $f_i\%$, $i=1,2,3,4,5$ είναι οι σχετικές συχνότητες επί τοις εκατό των αντίστοιχων κλάσεων. Θεωρούμε ότι οι παρατηρήσεις κάθε κλάσης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες. Δίνεται ότι :

- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μικρότερες του 10 είναι 10%.
- Το ποσοστό των παρατηρήσεων του δείγματος που είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 είναι 30%.
- Στο κυκλικό διάγραμμα σχετικών συχνοτήτων, η γωνία του κυκλικού τομέα που αντιστοιχεί στην $3^η$ κλάση είναι 108^o.
- Η μέση τιμή των παρατηρήσεων του δείγματος είναι $\bar{x}=14$.

Κλάσεις	f_i%
[**8** , **10**)	
[**10** , **12**)	
[**12** , **14**)	
[**14** , **16**)	
[**16** , **18**)	

ΠΙΝΑΚΑΣ Ι

Γ1. Να αποδείξετε ότι $f_1\%=10, f_2\%=10, f_3\%=30, f_4\%=20, f_5\%=30$. Δεν είναι απαραίτητο να μεταφέρετε στο τετράδιό σας τον **Πίνακα Ι** συμπληρωμένο.

Μονάδες 6

Γ2. Να εξετάσετε αν το δείγμα των παρατηρήσεων είναι ομοιογενές.

Δίνεται ότι $\sqrt{6,6} \simeq 2,57$.

Μονάδες 7

Γ3. Έστω x_1, x_2, x_3 και x_4 τα κέντρα της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα και ν_1, ν_2, ν_3 και ν_4 οι συχνότητες της $1^{ης}$, $2^{ης}$, $3^{ης}$ και $4^{ης}$ κλάσης αντίστοιχα. Αν $\sum_{i=1}^{4} x_i\nu_i = 1780$, βρείτε το πλήθος ν των παρατηρήσεων του δείγματος.

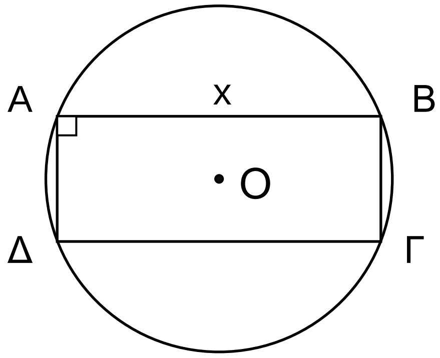
Μονάδες 5

Γ4. Έστω $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ πέντε τυχαία επιλεγμένες παρατηρήσεις διαφορετικές μεταξύ τους από το παραπάνω δείγμα ν παρατηρήσεων. Ορίζουμε ως $\bar{\alpha}$ τη μέση τιμή των πέντε αυτών παρατηρήσεων και S_α την τυπική τους απόκλιση. Εάν $\beta_i = \dfrac{\alpha_i - \bar{\alpha}}{S_\alpha}$, για i=1, 2, 3, 4, 5, να δείξετε ότι η μέση τιμή $\bar{\beta}$ του δείγματος β_i, i=1, 2, 3, 4, 5 είναι ίση με 0 και η τυπική του απόκλιση S_β είναι ίση με 1.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται κύκλος (Ο,ρ) με κέντρο Ο και ακτίνα ρ=5 και ορθογώνιο ΑΒΓΔ εγγεγραμμένο στον κύκλο αυτόν με πλευρά ΑΒ=x, όπως φαίνεται στο **Σχήμα Ι**.



ΣΧΗΜΑ Ι

Δ1. Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ, ως συνάρτηση του x, δίνεται από τον τύπο $f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2}$, $0 < x < 10$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε την τιμή του x για την οποία το εμβαδόν του ορθογωνίου ΑΒΓΔ γίνεται μέγιστο. Για την τιμή αυτήν του x, δείξτε ότι το ορθογώνιο ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο.

Μονάδες 5

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{f(1+x) - \sqrt{99}}{98 \cdot x}$.

Μονάδες 8

Δ4. Έστω Α, Β ενδεχόμενα ενός δειγματικού χώρου Ω. Αν P(A-B)>0, να δείξετε ότι

$$f\left(\frac{P(A-B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}}\right) \le f\left(\frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A-B)}}\right).$$

Μονάδες 8

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.30 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΤΕΤΑΡΤΗ 20 ΜΑΪΟΥ 2015

ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ & ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ ΓΕΝΙΚΗΣ ΠΑΙΔΕΙΑΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 31
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 22
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 87
Α4. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Λάθος, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. $(3x - 1) \cdot (8x^2 - 6x + 1) = 0 \Leftrightarrow$
$3x - 1 = 0$ ή $8x^2 - 6x + 1 = 0 \Leftrightarrow$

- $3x - 1 = 0 \Leftrightarrow 3x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{3}$
- $8x^2 - 6x + 1 = 0$

$$\Delta = 4 \text{ και } x_{1,2} = \frac{6 \pm 2}{16} = \left\langle \begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} \end{array} \right.$$

Είναι $A \cap B \subseteq A \subseteq A \cup B \Rightarrow P(A \cap B) \leq P(A) \leq P(A \cup B)$
και επειδή οι πιθανότητες $P(A \cap B)$, $P(A)$, $P(A \cup B)$
είναι διαφορετικές μεταξύ τους ανά δύο

θα είναι $\mathbf{P(A \cap B) = \frac{1}{4}}$, $\mathbf{P(A) = \frac{1}{3}}$ και $\mathbf{P(A \cup B) = \frac{1}{2}}$.

Β2. Είναι $A' - B' = A' \cap B = B \cap A' = B - A$

$$\boxed{\begin{aligned} &P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \Leftrightarrow \\ &P(B) = P(A \cup B) + P(A \cap B) - P(A) \Rightarrow \\ &P(B) = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \Leftrightarrow \quad P(B) = \frac{5}{12} \end{aligned}}$$

$$P(A' - B') = P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) = \frac{5}{12} - \frac{1}{4} = \frac{2}{12} = \mathbf{\frac{1}{6}}$$

$$P(\Delta) = P((A \cap B)') = 1 - P(A \cap B) = 1 - \frac{1}{4} = \mathbf{\frac{3}{4}}$$

Β3. $P(E) = P((A - B) \cup (B - A)) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) \Rightarrow$

$$P(E) = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{3} + \frac{5}{12} - \frac{1}{2} = \frac{3}{12} = \mathbf{\frac{1}{4}}$$

Β4. Το $P(\Gamma)$ είναι λύση της εξίσωσης $9x^2 - 3x - 2 = 0$

$$\Delta = 81 \text{ και } x_{1,2} = \frac{3 \pm 9}{18} = \begin{cases} \dfrac{2}{3} & \text{δεκτή, άρα } P(\Gamma) = \dfrac{2}{3} \\ -\dfrac{1}{3}, & \text{απορρίπτεται διότι } P(\Gamma) \geq 0 \end{cases}$$

Έστω Β , Γ ασυμβίβαστα.

Τότε ισχύει ο απλός προσθετικός νόμος.

$$P(B \cup \Gamma) = P(B) + P(\Gamma) = \frac{5}{12} + \frac{2}{3} = \frac{13}{12} > 1$$

Άτοπο, διότι $0 \leq P(B \cup \Gamma) \leq 1$

Επομένως **τα Β, Γ δεν είναι ασυμβίβαστα**.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

Κλάσεις	$f_i\%$	f_i	x_i	x_if_i
[8 , 10)	10	0,1	9	0,9
[10 , 12)		x	11	11x
[12 , 14)	30	0,3	13	3,9
[14 , 16)		y = 0,3 - x	15	4,5 - 15x
[16, 18)	30	0,3	17	5,1
Σύνολα	**100**	**1**		**14,4 - 4x**

- Το 10% των παρατηρήσεων είναι μικρότερες του 10, άρα $f_1\% = 10$.
- Το 30% των παρατηρήσεων είναι μεγαλύτερες ή ίσες του 16 άρα $f_5\% = 30$.
- $\alpha_3 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 \cdot 360^0 = 108^0 \Leftrightarrow f_3 = 0{,}3 \Leftrightarrow \mathbf{f_3\% = 30}$
- $\sum f_i = 1 \Leftrightarrow 0{,}1 + x + 0{,}3 + y + 0{,}3 = 1 \Leftrightarrow y = 0{,}3 - x$
- $\bar{x} = \sum x_i f_i \Leftrightarrow 14 = 14{,}4 - 4x \Leftrightarrow 4x = 0{,}4 \Leftrightarrow x = 0{,}1$

άρα $f_2 = 0{,}1$, $f_4 = 0{,}2$ και $\mathbf{f_2\% = 10}$, $\mathbf{f_4\% = 20}$

Γ2.

Κλάσεις	x_i	$x_i - \bar{x}$	f_i	v_i	$(x_i - \bar{x})^2$	$(x_i - \bar{x})^2 f_i$
[8 , 10)	9	-5	0,1	0,1v	25	2,5
[10 , 12)	11	-3	0,1	0,1v	9	0,9
[12 , 14)	13	-1	0,3	0,3v	1	0,3
[14 , 16)	15	1	0,2	0,2v	1	0,2
[16, 18)	17	3	0,3	0,3v	9	2,7
Σύνολα			**1**	**v**		**6,6**

$$s^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 v_i}{v} = \sum (x_i - \bar{x})^2 f_i = 6{,}6 \text{ και } s = \sqrt{s^2} = \sqrt{6{,}6} \cong 2{,}57$$

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2{,}57}{14} = 0{,}1836 = 18{,}36\% > 10\%$$

άρα **το δείγμα δεν είναι ομοιογενές**.

Γ3. 1^{ος} τρόπος

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{5} x_i v_i}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{\sum_{i=1}^{4} x_i v_i + x_5 v_5}{v} \Leftrightarrow 14 = \frac{1780 + 17v_5}{v} \overset{v_5 = 0{,}3v}{\Leftrightarrow}$$

$$14 = \frac{1780 + 17 \cdot 0{,}3v}{v} \Leftrightarrow 14v = 1780 + 5{,}1v \Leftrightarrow 8{,}9v = 1780 \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow \mathbf{v = 200}$$

2^{ος} τρόπος

$$\sum_{i=1}^{4} x_i v_i = 1780 \Leftrightarrow x_1 v_1 + x_2 v_2 + x_3 v_3 + x_4 v_4 = 1780 \Leftrightarrow$$

$$9 \cdot 0{,}1v + 11 \cdot 0{,}1v + 13 \cdot 0{,}3v + 15 \cdot 0{,}2v = 1780 \Leftrightarrow$$

$$0{,}9v + 1{,}1v + 3{,}9v + 3v = 1780 \Leftrightarrow 8{,}9v = 1780 \Leftrightarrow$$

$$v = \frac{1780}{8{,}9} \Leftrightarrow \mathbf{v = 200}$$

Γ4. 1^{ος} τρόπος

Είναι $\beta_i = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \alpha_i - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$, δηλαδή οι τιμές α_i πολλαπλασιάζονται επί $\frac{1}{s_\alpha}$ και έπειτα αφαιρούμε $\frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha}$.

Από εφαρμογή σχολικού βιβλίου είναι :

$$\bar{\beta} = \frac{1}{s_\alpha} \cdot \bar{\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} - \frac{\bar{\alpha}}{s_\alpha} = \mathbf{0} \quad \text{και}$$

$$s_\beta = \frac{1}{s_\alpha} \cdot s_\alpha = \mathbf{1}$$

$2^{ος}$ τρόπος

Είναι $\overline{\beta} = \dfrac{\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 + \beta_5}{5} = \dfrac{\dfrac{\alpha_1-\overline{\alpha}}{s_\alpha} + \dfrac{\alpha_2-\overline{\alpha}}{s_\alpha} + \dfrac{\alpha_3-\overline{\alpha}}{s_\alpha} + \dfrac{\alpha_4-\overline{\alpha}}{s_\alpha} + \dfrac{\alpha_5-\overline{\alpha}}{s_\alpha}}{5}$

$$= \frac{\dfrac{\alpha_1-\overline{\alpha}+\alpha_2-\overline{\alpha}+\alpha_3-\overline{\alpha}+\alpha_4-\overline{\alpha}+\alpha_5-\overline{\alpha}}{s_\alpha}}{5} = \frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 5\overline{\alpha}}{5s_\alpha}$$

$$= \frac{1}{s_\alpha}\cdot\frac{\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 - 5\overline{\alpha}}{5} = \frac{1}{s_\alpha}\cdot\left(\frac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3+\alpha_4+\alpha_5}{5} - \overline{\alpha}\right)$$

$$= \frac{1}{s_\alpha}\cdot(\overline{\alpha} - \overline{\alpha}) = \frac{1}{s_\alpha}\cdot 0 = 0$$

Επίσης $s_\beta = \dfrac{(\beta_1 - 0)^2 + (\beta_2 - 0)^2 + (\beta_3 - 0)^2 + (\beta_4 - 0)^2 + (\beta_5 - 0)^2}{5}$

$$= \frac{\beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 + \beta_4^2 + \beta_5^2}{5}$$

$$= \frac{\left(\dfrac{\alpha_1 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha_2 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha_3 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha_4 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2 + \left(\dfrac{\alpha_5 - \overline{\alpha}}{s_\alpha}\right)^2}{5}$$

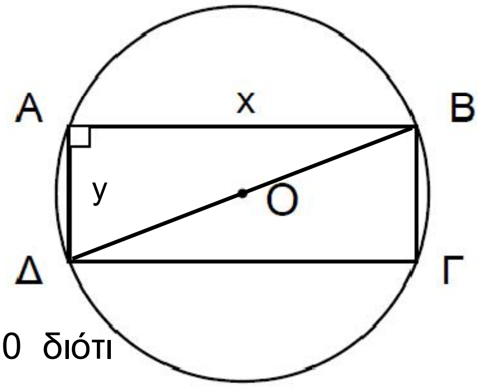
$$= \frac{\dfrac{(\alpha_1 - \overline{\alpha})^2}{s_\alpha^2} + \dfrac{(\alpha_2 - \overline{\alpha})^2}{s_\alpha^2} + \dfrac{(\alpha_3 - \overline{\alpha})^2}{s_\alpha^2} + \dfrac{(\alpha_4 - \overline{\alpha})^2}{s_\alpha^2} + \dfrac{(\alpha_5 - \overline{\alpha})^2}{s_\alpha^2}}{5}$$

$$= \frac{1}{s_\alpha^2}\cdot\frac{(\alpha_1 - \overline{\alpha})^2 + (\alpha_2 - \overline{\alpha})^2 + (\alpha_3 - \overline{\alpha})^2 + (\alpha_4 - \overline{\alpha})^2 + (\alpha_5 - \overline{\alpha})^2}{5}$$

$$= \frac{1}{s_\alpha^2}\cdot s_\alpha^2$$

$$= 1$$

ΘΕΜΑ Δ



Δ1. Φέρνουμε τη διαγώνιο ΔΒ, η οποία είναι και διάμετρος.

Πυθαγόρειο θεώρημα στο ΑΔΒ

$y^2 = 10^2 - x^2 = 100 - x^2$, άρα $y = \sqrt{100 - x^2}$

$(ΑΒΓΔ) = x \cdot y \Leftrightarrow f(x) = x \cdot \sqrt{100 - x^2},\ 0 < x < 10$ διότι

- $x > 0$
- $y > 0 \Leftrightarrow \sqrt{100 - x^2} > 0 \Leftrightarrow 100 - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 < 100 \Leftrightarrow x < 10$

Δ2. $f'(x) = \left(x \cdot \sqrt{100 - x^2}\right)' = (x)' \cdot \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \left(\sqrt{100 - x^2}\right)'$

$$= \sqrt{100 - x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{100 - x^2}} = \sqrt{100 - x^2} + \frac{-x^2}{\sqrt{100 - x^2}}$$

$$= \frac{\left(\sqrt{100 - x^2}\right)^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - x^2 - x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}},\ 0 < x < 10$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{100 - 2x^2}{\sqrt{100 - x^2}} = 0 \Leftrightarrow 100 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 = 100 \Leftrightarrow$$

$$x^2 = 50 \overset{x > 0}{\Leftrightarrow} x = \sum 50 \Leftrightarrow x = 5\sqrt{2}$$

x	0	$5\sqrt{2}$	10
f ΄(x)	+	0	-
f (x)	↗		↘

Η f παρουσιάζει μέγιστο για $x = 5\sqrt{2}$ και

$y = \sqrt{100 - \left(5\sqrt{2}\right)^2} = \sqrt{100 - 50} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2} = x$

άρα **το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο**.

Δ3. 1ος τρόπος

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\frac{1}{98}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-f(1)}{x}=\frac{1}{98}\cdot f'(1)$$

$$=\frac{1}{98}\cdot\frac{100-2}{\sqrt{100-1}}=\frac{1}{98}\cdot\frac{98}{\sqrt{99}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{99}}}\ \text{ή}\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{99}}{99}}$$

2ος τρόπος

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(1+x)-\sqrt{99}}{98x}=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}}{98x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}-\sqrt{99}\right]\left[(x+1)\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}{98x\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x+1)^2\cdot\left(\sqrt{100-(x+1)^2}\right)^2-\left(\sqrt{99}\right)^2}{98x\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+2x+1)\cdot(99-x^2-2x)-99}{98x\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{99x^2-x^4-2x^3+198x-2x^3-4x^2+99-x^2-2x-99}{98x\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^4-4x^3+96x^2+196x}{98x\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cancel{x}\cdot(-x^3-4x^2+96x+196)}{98\cancel{x}\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-x^3-4x^2+96x+196}{98\cdot\left[(x+1)\cdot\sqrt{100-(x+1)^2}+\sqrt{99}\right]}$$

$$=\frac{196}{98\cdot 2\sqrt{99}}=\frac{196}{196\cdot\sqrt{99}}=\boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{99}}}\ \text{ή}\ \boldsymbol{\frac{\sqrt{99}}{99}}$$

Δ4. Είναι $A - B \subseteq A \Rightarrow P(A - B) \leq P(A)$

$$0 < P(A - B) \leq P(A) \overset{f \uparrow \text{ στο } (0,1]}{\Leftrightarrow}$$

$$f(P(A - B)) \leq f(P(A)) \Leftrightarrow$$

$$P(A - B)\cdot\sqrt{100 - P^2(A - B)} \leq P(A)\cdot\sqrt{100 - P^2(A)} \Leftrightarrow$$

$$\frac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} \leq \frac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} \underset{(*)}{\overset{f \uparrow \text{ στο } (0,1]}{\Leftrightarrow}}$$

$$\mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{P(A - B)}}{\sqrt{\mathbf{100 - P^2(A)}}}\right) \leq \mathbf{f}\left(\frac{\mathbf{P(A)}}{\sqrt{\mathbf{100 - P^2(A - B)}}}\right)$$

(*) θα αποδείξουμε ότι $0 < \dfrac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} < 1$

- $\dfrac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} > 0$, αφού $P(A - B) > 0$ και $\sqrt{100 - P^2(A)} > 0$
- $\dfrac{P(A - B)}{\sqrt{100 - P^2(A)}} < 1 \Leftrightarrow P(A - B) < \sqrt{100 - P^2(A)}$

  που ισχύει διότι

  $0 < P(A) \leq 1 \Leftrightarrow 0 < P^2(A) \leq 1 \Leftrightarrow 0 > -P^2(A) \geq -1 \Leftrightarrow$

  $100 > 100 - P^2(A) \geq 99 \Leftrightarrow 10 > \sqrt{100 - P^2(A)} \geq \sqrt{99}$

  και $\sqrt{100 - P^2(A)} \geq \sqrt{99} > 1 \geq P(A - B)$

Όμοια $0 < \dfrac{P(A)}{\sqrt{100 - P^2(A - B)}} < 1$