ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ
ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ:
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ
ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω μια συνάρτηση f, η οποία είναι ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν

- η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$ και
- $f(\alpha)\neq f(\beta)$,

τότε να αποδείξετε ότι για κάθε αριθμό $\boldsymbol{\eta}$ μεταξύ των $f(\alpha)$ και $f(\beta)$ υπάρχει ένας τουλάχιστον $x_0\in(\alpha,\beta)$, τέτοιος ώστε $f(x_0)=\boldsymbol{\eta}$.

Μονάδες 7

Α2. Έστω μια συνάρτηση f και x_0 ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Πότε θα λέμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0;

Μονάδες 4

Α3. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A. Πότε λέμε ότι η f παρουσιάζει στο $x_0\in A$ τοπικό ελάχιστο;

Μονάδες 4

Α4. *Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.*

α) Αν για δύο συναρτήσεις f, g ορίζονται οι συναρτήσεις $f\circ g$ και $g\circ f$, τότε ισχύει πάντοτε ότι $f\circ g = g\circ f$.

β) Η διανυσματική ακτίνα της διαφοράς των μιγαδικών $\alpha+\beta i$ και $\gamma+\delta i$ είναι η διαφορά των διανυσματικών ακτίνων τους.

γ) Για κάθε $x\in\mathbb{R}$ ισχύει ότι $(\sigma\upsilon\nu x)'=\eta\mu x$.

δ) Έστω f μία συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα $[\alpha,\beta]$. Αν ισχύει ότι $f(x)\geq 0$ για κάθε $x\in[\alpha,\beta]$ και η συνάρτηση f δεν είναι παντού μηδέν στο διάστημα αυτό, τότε $\int_\alpha^\beta f(x)dx>0$.

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$ και $f(x)>0$ κοντά στο x_0, τότε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{1}{f(x)}=+\infty$.

Μονάδες 10

ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

$$|z-4|=2|z-1|.$$

Β1. Να αποδείξετε ότι ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών των μιγαδικών αριθμών z είναι κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα $\rho=2$.

Μονάδες 7

Β2. Έστω $w=\frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1}$, όπου z_1, z_2 δύο μιγαδικοί αριθμοί του ερωτήματος Β1.

Να αποδείξετε ότι:

α) Ο w είναι πραγματικός και

(μονάδες 4)

β) $-4\leq w\leq 4$.

(μονάδες 7)

Μονάδες 11

Β3. Αν $w=-4$, όπου w είναι ο μιγαδικός αριθμός του ερωτήματος Β2, να βρείτε τη σχέση που συνδέει τους μιγαδικούς αριθμούς z_1, z_2 και να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΒΓ με κορυφές τις εικόνες $A(z_1)$, $B(z_2)$, $\Gamma(z_3)$ των μιγαδικών αριθμών z_1, z_2 και z_3, με $z_3=2iz_1$, είναι ισοσκελές.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{e^x}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα $(0,+\infty)$.

Μονάδες 6

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$f\left(e^{3-x}\cdot(x^2+1)\right)=\frac{e^2}{5}$$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Μονάδες 8

Γ3. Να αποδείξετε ότι

$$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x f(4x)$$

για κάθε $x>0$.

Μονάδες 4

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\displaystyle\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt, & x>0\\ 2, & x=0\end{cases}$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0,+\infty)$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Δ

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ για την οποία ισχύουν:

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$ και
- $f(0)=0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ell n\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$, $x\in\mathbb{R}$.

Μονάδες 5

Δ2. **α)** Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

(μονάδες 3)

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y = x$ και τις ευθείες $x = 0$ και $x = 1$.

(μονάδες 4)

Μονάδες 7

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt} - 1\right)\ell n\left|f(x)\right|\right].$$

Μονάδες 6

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f(t^2)dt}{x-3} + \frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2} = 0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2,3).

Μονάδες 7

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

1. **Στο εξώφυλλο** του τετραδίου να γράψετε το εξεταζόμενο μάθημα. **Στο εσώφυλλο πάνω-πάνω** να συμπληρώσετε τα ατομικά στοιχεία μαθητή. **Στην αρχή των απαντήσεών σας** να γράψετε πάνω-πάνω την ημερομηνία και το εξεταζόμενο μάθημα. **Να μην αντιγράψετε** τα θέματα στο τετράδιο και **να μη γράψετε** πουθενά στις απαντήσεις σας το όνομά σας.
2. Να γράψετε το ονοματεπώνυμό σας στο πάνω μέρος των φωτοαντιγράφων αμέσως μόλις σας παραδοθούν. **Τυχόν σημειώσεις σας πάνω στα θέματα δεν θα βαθμολογηθούν σε καμία περίπτωση**. Κατά την αποχώρησή σας να παραδώσετε μαζί με το τετράδιο και τα φωτοαντίγραφα.
3. Να απαντήσετε **στο τετράδιό σας** σε όλα τα θέματα **μόνο** με μπλε ή **μόνο** με μαύρο στυλό με μελάνι που δεν σβήνει. Μολύβι επιτρέπεται, **μόνο** αν το ζητάει η εκφώνηση, και **μόνο** για πίνακες, διαγράμματα κλπ.
4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.
5. Διάρκεια εξέτασης: τρεις (3) ώρες μετά τη διανομή των φωτοαντιγράφων.
6. Χρόνος δυνατής αποχώρησης: 10.00 π.μ.

ΣΑΣ ΕΥΧΟΜΑΣΤΕ ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ

ΤΕΛΟΣ ΜΗΝΥΜΑΤΟΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ Γ΄ ΤΑΞΗΣ ΗΜΕΡΗΣΙΟΥ ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ ΕΠΑΛ (ΟΜΑΔΑ Β΄)
ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015
ΑΠΑΝΤΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΘΕΤΙΚΗΣ & ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Σχολικό βιβλίο σελίδα 194
Α2. Σχολικό βιβλίο σελίδα 188
Α3. Σχολικό βιβλίο σελίδα 259
Α4. α. Λάθος, **β.** Σωστό, **γ.** Λάθος, **δ.** Σωστό, **ε.** Σωστό.

ΘΕΜΑ Β

Β1. 1ος τρόπος

$$|z-4| = 2\cdot|z-1| \Leftrightarrow$$
$$|z-4|^2 = 4\cdot|z-1|^2 \Leftrightarrow$$
$$(z-4)(\bar{z}-4) = 4(z-1)(\bar{z}-1) \Leftrightarrow$$
$$z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 16 = 4z\bar{z} - 4\bar{z} - 4z + 4 \Leftrightarrow$$
$$-3z\bar{z} = -12 \Leftrightarrow z\bar{z} = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow \mathbf{|z| = 2}$$

2ος τρόπος

$$|z-4| = 2\cdot|z-1| \underset{x,\,y\in\mathbb{R}}{\overset{z=x+yi}{\Leftrightarrow}}$$
$$|x+yi-4| = 2\cdot|x+yi-1| \Leftrightarrow$$
$$|(x-4)+yi| = |(2x-2)+2yi| \Leftrightarrow$$
$$\sqrt{(x-4)^2+y^2} = \sqrt{(2x-2)^2+(2y)^2} \Leftrightarrow$$
$$(x-4)^2+y^2 = (2x-2)^2+(2y)^2 \Leftrightarrow$$
$$x^2 - 8x + 16 + y^2 = 4x^2 - 8x + 4 + 4y^2 \Leftrightarrow$$
$$-3x^2 - 3y^2 = -12 \Leftrightarrow$$
$$x^2 + y^2 = 4 \Leftrightarrow |z|^2 = 4 \Leftrightarrow \mathbf{|z| = 2}$$

B2. α) $|z_1| = 2 \Leftrightarrow |z_1|^2 = 4 \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 = 4 \Leftrightarrow z_1 = \dfrac{4}{\bar{z}_1}$ και $\bar{z}_1 = \dfrac{4}{z_1}$

$|z_2| = 2 \Leftrightarrow |z_2|^2 = 4 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2 = 4 \Leftrightarrow z_2 = \dfrac{4}{\bar{z}_2}$ και $\bar{z}_2 = \dfrac{4}{z_2}$

1ος τρόπος

$$\bar{w} = \overline{\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} = \frac{2\frac{\cancel{4}}{z_1}}{\frac{\cancel{4}}{z_2}} + \frac{2\frac{\cancel{4}}{z_2}}{\frac{\cancel{4}}{z_1}} = \frac{2z_2}{z_2} + \frac{2z_1}{z_2} = w$$

άρα $\mathbf{w} \in \mathbf{IR}$.

2ος τρόπος

$$w = \bar{w} \Leftrightarrow \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \overline{\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}} \Leftrightarrow$$

$$\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} + \frac{2\bar{z}_2}{\bar{z}_1} \overset{\cdot z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2}{\Leftrightarrow}$$

$$2z_1z_1\bar{z}_1\bar{z}_2 + 2z_2z_2\bar{z}_2\bar{z}_1 = 2z_1\bar{z}_1z_2\bar{z}_1 + 2z_1z_2\bar{z}_2\bar{z}_2 \underset{z_2\bar{z}_2=4}{\overset{z_1\bar{z}_1=4}{\Leftrightarrow}}$$

$8z_1\bar{z}_2 + 8z_2\bar{z}_1 = 8z_2\bar{z}_1 + 8z_1\bar{z}_2$, που ισχύει

$w = \bar{w} \Leftrightarrow \mathbf{w} \in \mathbf{IR}$

3ος τρόπος

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_2}}{\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_1}} = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = 2\left(\frac{z_1}{z_2} + \overline{\frac{z_1}{z_2}}\right) = 4\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

άρα $\mathbf{w} \in \mathbf{IR}$

4ος τρόπος

$$w = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} = \frac{2z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2} + \frac{2z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{2z_1\bar{z}_2}{4} + \frac{2z_2\bar{z}_1}{4} = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1)$$

$$= \frac{1}{2}\left(z_1\bar{z}_2 + \overline{z_1\bar{z}_2}\right) = \frac{1}{2}2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2),$$ άρα $\mathbf{w} \in \mathbf{IR}$

β) **$1^{ος}$ τρόπος**

$$|w| = \left|\frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1}\right| \le \left|\frac{2z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{2z_2}{z_1}\right| = \frac{2\cancel{|z_1|}}{\cancel{|z_2|}} + \frac{2\cancel{|z_2|}}{\cancel{|z_1|}} = 4$$

$$|w| \le 4 \overset{w\in IR}{\Leftrightarrow} \mathbf{-4 \le w \le 4}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$w = \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1} = \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_2}}{\frac{\cancel{4}}{\bar{z}_1}} = \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = 2\left(\frac{z_1}{z_2}+\overline{\frac{z_1}{z_2}}\right)$$

$$= 2\cdot 2\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = 4\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right)$$

Είναι $\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|} = \frac{2}{2} = 1$, άρα η εικόνα του μιγαδικού

$\frac{z_1}{z_2}$ κινείται στον μοναδιαίο κύκλο

Είναι $-1 \le \mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \le 1 \Leftrightarrow -4 \le 4\mathrm{Re}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$

$3^{ος}$ τρόπος

$$w = \frac{2z_1}{z_2}+\frac{2z_2}{z_1} = \frac{2z_1\bar{z}_2}{z_2\bar{z}_2}+\frac{2z_2\bar{z}_1}{z_1\bar{z}_1} = \frac{2z_1\bar{z}_2}{4}+\frac{2z_2\bar{z}_1}{4} = \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+z_2\bar{z}_1)$$

$$= \frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\overline{z_1\bar{z}_2}) = \frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) = \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)$$

Είναι $|z_1\bar{z}_2| = |z_1|\cdot|\bar{z}_2| = 2\cdot 2 = 4$, άρα η εικόνα του μιγαδικού $z_1\bar{z}_2$ κινείται στον κύκλο με κέντρο O (0 , 0) και ακτίνα 4 δηλαδή $-4 \le \mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2) \le 4 \Leftrightarrow -4 \le w \le 4$

Β3. Για $w = -4$ είναι $-4 = \frac{2z_1}{z_2} + \frac{2z_2}{z_1} \overset{z_1 z_2}{\Leftrightarrow}$

$-4z_1z_2 = 2z_1^2 + 2z_2^2 \overset{:2}{\Leftrightarrow}$

$z_1^2 + z_2^2 + 2z_1z_2 = 0 \Leftrightarrow$

$(z_1 + z_2)^2 = 0 \Leftrightarrow$

$z_1 + z_2 = 0 \Leftrightarrow$

$\mathbf{z_1 = - z_2}$

1^{ος} τρόπος

- $(ΑΓ) = |z_1 - z_3| = |z_1 - 2iz_1| = |z_1(1 - 2i)| = |z_1| \cdot |1 - 2i| = \sqrt{5}|z_1|$
- $(ΒΓ) = |z_2 - z_3| = |-z_1 - 2iz_1| = |z_1(-1 - 2i)| = |z_1| \cdot |-1 - 2i| = \sqrt{5}|z_1|$

άρα $(ΑΓ) = (ΒΓ)$ δηλαδή **το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές.**

2^{ος} τρόπος

Έστω $z_1 = α + βi$, δηλαδή $Α(α , β)$

Είναι $z_2 = -z_1 = -α - βi$, δηλαδή $Β(-α , -β)$

και $z_3 = 2iz_1 = 2i(α + βi) = 2β - 2βi$, δηλαδή $Γ(2β , -2α)$

- $(ΑΓ) = \sqrt{(2β - α)^2 + (-2α - β)^2}$
  $= \sqrt{4β^2 - 4αβ + α^2 + 4α^2 + 4αβ + β^2}$
  $= \sqrt{5β^2 + 5α^2}$
- $(ΒΓ) = \sqrt{(2β + α)^2 + (-2α + β)^2}$
  $= \sqrt{4β^2 + 4αβ + α^2 + 4α^2 - 4αβ + β^2}$
  $= \sqrt{5β^2 + 5α^2}$

Είναι $(ΑΓ) = (ΒΓ)$, άρα **το $\overset{\Delta}{ΑΒΓ}$ είναι ισοσκελές.**

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. $f'(x) = \left(\dfrac{e^x}{x^2 + 1}\right)' = \dfrac{(e^x)' \cdot (x^2 + 1) - (e^x) \cdot (x^2 + 1)'}{(x^2 + 1)^2}$

$$= \frac{e^x \cdot (x^2 + 1) - 2x \cdot e^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x^2 - 2x - 1) \cdot e^x}{(x^2 + 1)^2} = \frac{(x - 1)^2 \cdot e^x}{(x^2 + 1)^2}$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	+
$f(x)$	↗		↗

και επειδή η f είναι συνεχής ως πηλίκο συνεχών,
η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR.

- $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(e^x \cdot \dfrac{1}{x^2 + 1}\right) = 0$, διότι

  $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ και $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x^2 + 1} = 0$, αφού $\lim\limits_{x \to -\infty} (x^2 + 1) = +\infty$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^2 + 1} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2x} \overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{DL'H}{=}} \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{2} = +\infty$

  επομένως το σύνολο τιμών της f είναι **f (IR) = (0 , + ∞)**

Γ2. $f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = \dfrac{e^2}{5} \Leftrightarrow f(e^{3-x} \cdot (x^2 + 1)) = f(2) \overset{f\ 1\text{-}1}{\Leftrightarrow}$

$e^{3-x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{e^3}{e^x} \cdot (x^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow \dfrac{x^2 + 1}{e^x} = \dfrac{2}{e^3} \Leftrightarrow$

$\dfrac{e^x}{x^2 + 1} = \dfrac{e^3}{2} \Leftrightarrow f(x) = \dfrac{e^3}{2}$

Το $\dfrac{e^3}{2}$ ανήκει στο σύνολο τιμών της f,
άρα η εξίσωση έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο IR
και επειδή η f είναι γνησίως αύξουσα στο IR,
η ρίζα αυτή είναι μοναδική.

Γ3. **$1^{ος}$ τρόπος**

$\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x\, f(4x) \iff \int_{2x}^{0} f(t)\,dt + \int_{0}^{4x} f(t)\,dt < 2x\, f(4x) \iff$

$\int_{0}^{4x} f(t)\,dt - \int_{0}^{2x} f(t)\,dt < 2x\, f(4x) \overset{x>0}{\iff} \dfrac{\int_{0}^{4x} f(t)\,dt - \int_{0}^{2x} f(t)\,dt}{2x} < f(4x)$ (1)

Θεωρώ συνάρτηση F, με $F(x) = \int_{0}^{x} f(t)\,dt$

F παραγωγίσιμη στο $[2x, 4x]$, με $F'(x) = f(x)$

από Θ.Μ.Τ.

υπάρχει $\xi \in (2x, 4x)$, τέτοιο ώστε $F'(\xi) = \dfrac{F(4x) - F(2x)}{4x - 2x} \iff$

$f(\xi) = \dfrac{\int_{0}^{4x} f(t)\,dt - \int_{0}^{2x} f(t)\,dt}{2x}$

(1) $\iff f(\xi) < f(4x) \overset{f\uparrow}{\iff} \xi < 4x$ που ισχύει

επομένως $\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt < 2x\, f(4x)$

$2^{ος}$ τρόπος

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[2x, 4x]$, άρα

$2x \le t \le 2x \iff f(2x) \le f(t) \le f(4x)$

$f(4x) - f(t) \ge 0$, για κάθε $x \in [2x, 4x]$, αλλά όχι παντού μηδέν

άρα $\int_{2x}^{4x} [f(4x) - f(t)]\,dt > 0 \iff$

$\int_{2x}^{4x} f(4x)\,dt - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > 0 \iff$

$f(4x) \cdot \int_{2x}^{4x} 1\,dt > \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \iff$

$f(4x) \cdot [t]_{2x}^{4x} > \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \iff$

$f(4x) \cdot (4x - 2x) > \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt \iff$

$2x \cdot f(4x) > \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt$

Γ4. Θεωρώ συνάρτηση F, με $F(x) = \int_0^x f(t)\,dt$.

Η F είναι παραγωγίσιμη με $F'(x) = f(x)$.

Για $x > 0$ είναι :

$$g(x) = \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt = \frac{\int_0^{4x} f(t)\,dt - \int_0^{2x} f(t)\,dt}{x} = \frac{F(4x) - F(2x)}{x}$$

- $$\lim_{x\to 0^+} g(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{F(4x) - F(2x)}{x} \underset{\text{DL'H}}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}} \lim_{x\to 0^+} \frac{4F'(4x) - 2F'(2x)}{1}$$

$$= \lim_{x\to 0^+}[4f(4x) - 2f(2x)] \overset{\text{f συνεχής}}{=} 4f(0) - 2f(0) = 4 - 2 = 2 = g(0),$$

άρα g συνεχής στο $x_0 = 0$.

- $$g'(x) = \left(\frac{\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x}\right)' = \frac{\left(\int_{2x}^{4x} f(t)\,dt\right)' \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$= \frac{(F(4x) - F(2x))' \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$= \frac{(4F'(4x) - 2F'(2x)) \cdot x - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$= \frac{4x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$= \frac{2x \cdot f(4x) - 2x \cdot f(2x) + 2x \cdot f(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2}$$

$$= \frac{2x \cdot [f(4x) - f(2x)] + 2x \cdot f(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt}{x^2} > 0$$

διότι $x > 0$, $2x \cdot f(4x) - \int_{2x}^{4x} f(t)\,dt > 0$ από Γ3 και

$f(4x) - f(2x) > 0$, αφού f είναι γνησίως αύξουσα και $2x < 4x$.

Επομένως **η g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.**

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. **$1^{ος}$ τρόπος**

$f'(x)\cdot[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \Leftrightarrow f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\cdot e^{-f(x)} = 2 \Leftrightarrow$

$[e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = (2x)'$ από συνέπειες Θ.Μ.Τ.

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \ x \in IR$

Για $x = 0$ είναι $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \Leftrightarrow e^0 - e^0 = c \Leftrightarrow c = 0$

άρα $e^{f(x)} - \dfrac{1}{e^{f(x)}} = 2x \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 1 = 2xe^{f(x)} \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} = 1 \Leftrightarrow (e^{f(x)})^2 - 2xe^{f(x)} + x^2 = x^2 + 1 \Leftrightarrow$

$(e^{f(x)} - x)^2 = x^2 + 1$ **(1)**

Θεωρώ συνάρτηση h, με $h(x) = e^{f(x)} - x$, Η h είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών Είναι $h^2(x) = x^2 + 1, \ x \in IR$ **(1).** Έστω ρ ρίζα της h, δηλαδή $h(\rho) = 0$ $(1) \overset{x=\rho}{\Rightarrow} h^2(\rho) = \rho^2 + 1 \Leftrightarrow 0 = \rho^2 + 1 \rightarrow$ ΑΤΟΠΟ άρα η h δεν έχει ρίζες στο IR. Από συνέπειες Θ. Bolzano η h διατηρεί σταθερό πρόσημο στο IR, και επειδή $h(0) = e^{f(0)} - 0 = e^0 = 1 > 0$, θα είναι $h(x) > 0$, για κάθε $x \in IR$.

$(1) \overset{h(x)>0}{\Leftrightarrow} h(x) = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} - x = \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$e^{f(x)} = x + \sqrt{x^2 + 1} \Leftrightarrow$

$\mathbf{f(x) = \ell n\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \ x \in IR}$

2^{ος} τρόπος

$f'(x)\cdot[e^{f(x)} + e^{-f(x)}] = 2 \;\Leftrightarrow\; f'(x)\cdot e^{f(x)} + f'(x)\cdot e^{-f(x)} = 2 \;\Leftrightarrow$

$[e^{f(x)} - e^{-f(x)}]' = (2x)'$ από συνέπειες Θ.Μ.Τ.

$e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x + c, \;\; x \in IR$

Για $x = 0$ είναι $e^{f(0)} - e^{-f(0)} = c \;\Leftrightarrow\; e^0 - e^0 = c \;\Leftrightarrow\; c = 0$

άρα $e^{f(x)} - e^{-f(x)} = 2x, \;\; x \in IR$ **(2)**

Θεωρώ συνάρτηση φ, με $\varphi(x) = e^x - e^{-x} = e^x - \dfrac{1}{e^x}$,

$\varphi'(x) = (e^x - e^{-x})' = e^x + e^{-x} > 0$,

άρα φ γνησίως αύξουσα στο IR

Είναι
$$\begin{aligned}\varphi(\ell n(x+\sqrt{x^2+1})) &= e^{\ell n(x+\sqrt{x^2+1})} - \frac{1}{e^{\ell n(x+\sqrt{x^2+1})}}\\ &= x+\sqrt{x^2+1} - \frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\\ &= x+\sqrt{x^2+1} - \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{(x+\sqrt{x^2+1})(x-\sqrt{x^2+1})}\\ &= x+\sqrt{x^2+1} - \frac{x-\sqrt{x^2+1}}{-1}\\ &= x+\sqrt{x^2+1} + x-\sqrt{x^2+1}\\ &= 2x\end{aligned}$$

(2) $\Leftrightarrow\;\; \varphi(f(x)) = \varphi(\ell n(x+\sqrt{x^2+1}))$

και επειδή η φ είναι "1 - 1" ως γνησίως αύξουσα θα είναι

$\mathbf{f(x) = \ell n(x+\sqrt{x^2+1}), \; x \in IR}$

Δ2. α) f (x) = $\ell n\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$, $x \in \mathbb{R}$

$$f'(x) = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)' = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + 1}} \cdot \left(1 + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}}\right)$$

$$= \frac{1}{\cancel{x + \sqrt{x^2 + 1}}} \cdot \frac{\cancel{x + \sqrt{x^2 + 1}}}{\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$$

$$f''(x) = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2} \cdot \left(\sqrt{x^2 + 1}\right)' = -\frac{1}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^2} \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{-x}{\left(\sqrt{x^2 + 1}\right)^3}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-
f (x)	$\cup$	σ.κ.	$\cap$

Η f είναι κυρτή στο $(-\infty , 0]$ και κοίλη στο $[0 , +\infty)$.

f (0) = $\ell n1 = 0$, άρα **η C_f έχει σημείο καμπής το O (0 , 0)**.

β) ε : η εφαπτομένη της cf στο O (0 , 0)

ε : y - f (0) = f΄(0)·(x - 0) $\Leftrightarrow$ ε : y = x

Η C_f είναι κοίλη στο [0 , 1],

άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την (ε), με εξαίρεση

το σημείο επαφής O (0 , 0), δηλαδή f (x) $\leq$ x

$$E = \int_0^1 [x - f(x)]\,dx = \int_0^1 \left[x - \ell n(x + \sqrt{x^2 + 1})\right] dx$$

$$= \int_0^1 x\,dx - \int_0^1 (x)' \cdot \ell n(x + \sqrt{x^2 + 1})\,dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 - \left[x \cdot \ell n(x + \sqrt{x^2 + 1})\,dx\right]_0^1 + \int_0^1 x \cdot \left[\ell n(x + \sqrt{x^2 + 1})\right]' dx$$

$$= \frac{1}{2} - \ell n(1 + \sqrt{2}) + \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}\,dx = \frac{1}{2} - \ell n(1 + \sqrt{2}) + \left[\sqrt{x^2 + 1}\right]_0^1$$

$$= \left(\mathbf{-\frac{1}{2} - \ell n(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2}}\right) \textbf{τ.μ.}$$

Δ3. **1^{ος} τρόπος**

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{f(x)}\cdot f(x)\cdot \ln|f(x)|\right]$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{f(x)}$

  Η $f_1(t)=f^2(t)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

  άρα η $f_2(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

  Τέλος η $f_3(x)=e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών,

  δηλαδή $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)=\lim_{x\to 0^+} f_3(x)=f_3(0)=e^{\int_0^0 f^2(t)\,dt}-1=e^0-1=0$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{f(x)}\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)'}{f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}$$

$$\overset{f,f',f_2\ \text{συνεχείς}}{=}\frac{e^{\int_0^0 f^2(t)\,dt}\cdot f^2(0)}{f'(0)}=0$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}[f(x)\cdot \ln|f(x)|]\underset{\lim_{x\to 0^+} f(x)=0}{\overset{\text{θέτω } f(x)=u}{=}}\lim_{u\to 0^+}(u\ln u)\overset{0\cdot(-\infty)}{=}\lim_{u\to 0^+}\frac{\ln u}{\frac{1}{u}}$

$$\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\lim_{u\to 0^+}\frac{\frac{1}{u}}{-\frac{1}{u^2}}=\lim_{u\to 0^+}(-u)=0$$

Επομένως

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{f(x)}\cdot\lim_{x\to 0^+}[f(x)\cdot \ln|f(x)|]=0\cdot 0=\mathbf{0}$$

$2^{ος}$ τρόπος

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)\cdot \ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{x}\cdot x\cdot \ln|f(x)|\right]=\mathbf{0},\ \text{διότι}$$

- $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{x}$

  Η $f_1(t)=f^2(t)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

  άρα η $f_2(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

  Τέλος η $f_3(x)=e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1$ είναι συνεχής ως πράξεις συνεχών,

  δηλαδή $\displaystyle\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1\right)=\lim_{x\to 0^+}f_3(x)=f_3(0)=e^{\int_0^0 f^2(t)\,dt}-1=e^0-1=0$

  $$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}-1}{x}\ \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)\,dt\right)'}{1}=\lim_{x\to 0^+}\left[e^{\int_0^x f^2(t)\,dt}\cdot f^2(x)\right]=0$$

- $$\lim_{x\to 0^+}x\cdot\ln|f(x)|\ \overset{0\cdot(-\infty)}{=}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\ln|f(x)|}{\frac{1}{x}}\ \underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{-x^2 f'(x)}{f(x)}$$

  $$\underset{DL'H}{\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}}\ \lim_{x\to 0^+}\frac{-2x\cdot f'(x)-x^2\cdot f''(x)}{f'(x)}=0$$

Δ4. Θεωρούμε τη συνάρτηση Q, με

$$Q(x)=(x-2)\left[1-3\int_0^{x-2}f(t^2)\,dt\right]+(x-3)\left[8-3\int_0^x f^2(t)\,dt\right]$$

- Η $f_1(t)=f^2(t)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

  άρα η $f_2(x)=\int_0^x f^2(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

  Η $f_4(t)=f(t^2)$ είναι συνεχής ως σύνθεση συνεχών

  άρα η $f_5(x)=\int_0^{x-2} f^2(t)\,dt$ είναι παραγωγίσιμη άρα και συνεχής.

  Τελικά η Q είναι συνεχής στο $[2\,,\,3]$ ως πράξεις συνεχών.

- $Q(2) = -\left[8 - 3\int_0^2 f^2(t)\,dt\right] = 3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8$

  Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, 2]$,
  άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $y = x$
  στο $O(0, 0)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής O.
  Άρα στο $[0, 2]$: $0 \le f(t) \le t \iff f^2(t) \le t^2 \iff t^2 - f^2(t) \ge 0$
  και επειδή δεν είναι παντού μηδέν θα είναι

  $$\int_0^2 [t^2 - f^2(t)]\,dt > 0 \iff \int_0^2 t^2\,dt - \int_0^2 f^2(t)\,dt > 0 \iff$$

  $$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^2 > \int_0^2 f^2(t)\,dt \iff \frac{8}{3} > \int_0^2 f^2(t)\,dt \iff 8 > 3\int_0^2 f^2(t)\,dt \iff$$

  $$3\int_0^2 f^2(t)\,dt - 8 < 0 \iff \mathbf{Q(2) < 0}$$

- $Q(3) = 1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt$

  Η f είναι κοίλη στο διάστημα $[0, 1]$,
  άρα η C_f βρίσκεται κάτω από την εφαπτομένη της $y = x$
  στο $O(0, 0)$ με εξαίρεση το σημείο επαφής O.
  Άρα στο $[0, 1]$: $0 \le f(t) \le t \iff f(t^2) \le t^2 \iff t^2 - f(t^2) \ge 0$
  και επειδή δεν είναι παντού μηδέν θα είναι

  $$\int_0^1 [t^2 - f(t^2)]\,dt > 0 \iff \int_0^1 t^2\,dt - \int_0^1 f(t^2)\,dt > 0 \iff$$

  $$\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 > \int_0^1 f(t^2)\,dt \iff \frac{1}{3} > \int_0^1 f(t^2)\,dt \iff 1 > 3\int_0^1 f(t^2)\,dt \iff$$

  $$1 - 3\int_0^1 f(t^2)\,dt > 0 \iff \mathbf{Q(3) > 0}$$

Από Θ. Bolzano **υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (2, 3)$, τέτοιο ώστε**

$$Q(\xi) = 0 \iff (\xi - 2)\left[1 - 3\int_0^{\xi - 2} f(t^2)\,dt\right] + (\xi - 3)\left[8 - 3\int_0^{\xi} f^2(t)\,dt\right] = 0$$

και επειδή $\xi - 2 \ne 0$ και $\xi - 3 \ne 0$, θα είναι

$$\mathbf{\frac{1 - 3\int_0^{\xi - 2} f(t^2)\,dt}{\xi - 3} + \frac{8 - 3\int_0^{\xi} f^2(t)\,dt}{\xi - 2} = 0}$$